

平成 21 年度 京都大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
総合人間 (文系), 文, 教育 (文系), 法, 経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

- 1 (1) xyz 空間上の 2 点 $A(-3, -1, 1)$, $B(-1, 0, 0)$ を通る直線 ℓ に点 $C(2, 3, 3)$ から下ろした垂線 H の座標を求めよ.
- (2) 白球と赤球の入った袋から 2 個の球を同時に取り出すゲームを考える. 取り出した 2 球がともに白球ならば「成功」でゲームを終了し, そうでないときは「失敗」とし, 取り出した 2 球に赤球を 1 個加えた 3 個の球を袋にもどしてゲームを続けるものとする. 最初に白球が 2 個, 赤球が 1 個袋に入っていたとき, $n - 1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を求めよ. ただし $n \geq 2$ とする.

- 2 整式 $f(x)$ と実数 C が

$$\int_0^x f(y) dy + \int_0^1 (x+y)^2 f(y) dy = x^2 + C$$

をみたすとき, この $f(x)$ と C を求めよ.

- 3 x, y は $x \neq 1, y \neq 1$ をみたす正の数で, 不等式

$$\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$$

をみたすとする. このとき x, y の組 (x, y) の範囲を座標平面上に図示せよ.

- 4 平面上で, 鋭角三角形 $\triangle OAB$ を辺 OB に関して折り返して得られる三角形を $\triangle OBC$, $\triangle OBC$ を辺 OC に関して折り返して得られる三角形を $\triangle OCD$, $\triangle OCD$ を辺 OD に関して折り返して得られる三角形を $\triangle ODE$ とする. $\triangle OAB$ と $\triangle OBE$ の面積比が $2:3$ のとき, $\sin \angle AOB$ の値を求めよ.

- 5 p を素数, n を正の整数とすると, $(p^n)!$ は p で何回割り切れるか.

解答例

1 (1) $A(-3, -1, 1)$, $B(-1, 0, 0)$ より $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 1, -1)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \quad (t \text{ は実数}) \\ &= (-3, -1, 1) + t(2, 1, -1) = (2t - 3, t - 1, -t + 1), \\ \overrightarrow{CH} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} \\ &= (2t - 3, t - 1, -t + 1) - (2, 3, 3) = (2t - 5, t - 4, -t - 2)\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CH}$ であるから, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$ より

$$2(2t - 5) + (t - 4) - (-t - 2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad t = 2$$

したがって $\overrightarrow{OH} = (2 \cdot 2 - 3, 2 - 1, -2 + 1) = (1, 1, -1)$

よって $H(1, 1, -1)$

- (2) k 回目の試行を行うとき ($k = 1, 2, \dots, n$), 袋の中には白球 2 個と赤球 k 個が入っているから, このとき「失敗」する確率は

$$1 - \frac{{}_2C_2}{{}_{k+2}C_2} = 1 - \frac{2}{(k+2)(k+1)} = \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$$

n 回目の試行で成功する確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_{n+2}C_2} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

よって, 求める確率は

$$\begin{aligned}& \frac{2}{(n+2)(n+1)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k+1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+3}{k+2} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n+2}{3} = \frac{2}{3n(n+1)}\end{aligned}$$



$$\boxed{2} \quad \int_0^x f(y) dy + \int_0^1 (x+y)^2 f(y) dy = x^2 + C \text{ より}$$

$$(*) \quad \int_0^x f(y) dy + x^2 \int_0^1 f(y) dy + 2x \int_0^1 y f(y) dy + \int_0^1 y^2 f(y) dy = x^2 + C$$

これを x について微分すると

$$f(x) + 2x \int_0^1 f(y) dy + 2 \int_0^1 y f(y) dy = 2x$$

$$A = \int_0^1 f(y) dy, \quad B = \int_0^1 y f(y) dy \text{ とおくと}$$

$$f(x) + 2Ax + 2B = 2x \quad \text{ゆえに} \quad f(x) = 2(1-A)x - 2B \quad \cdots \textcircled{1}$$

したがって

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(y) dy = \int_0^1 \{2(1-A)y - 2B\} dy \\ &= \left[(1-A)y^2 - 2By \right]_0^1 = 1 - A - 2B, \\ B &= \int_0^1 y f(y) dy = \int_0^1 y \{2(1-A)y - 2B\} dy \\ &= \left[\frac{2}{3}(1-A)y^3 - By^2 \right]_0^1 = \frac{2}{3}(1-A) - B \end{aligned}$$

$$\text{上の2式から} \quad 2A + 2B = 1, \quad \frac{2}{3}A + 2B = \frac{2}{3} \quad \text{ゆえに} \quad A = B = \frac{1}{4}$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入すると} \quad f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

(*) に $x = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 y^2 f(y) dy = \int_0^1 y^2 \left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \right) dy \\ &= \left[\frac{3}{8}y^4 - \frac{1}{6}y^3 \right]_0^1 = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

■

3 $\log_x y + \log_y x > 2 + (\log_x 2)(\log_y 2)$ より

$$\frac{\log_2 y}{\log_2 x} + \frac{\log_2 x}{\log_2 y} > 2 + \frac{1}{\log_2 x} \cdot \frac{1}{\log_2 y}$$

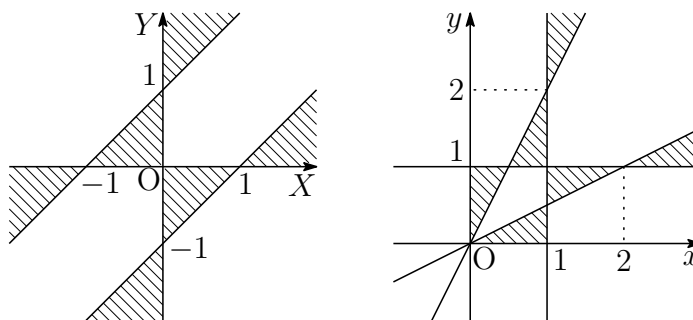
$X = \log_2 x$, $Y = \log_2 y$ とおくと

$$\frac{Y}{X} + \frac{X}{Y} > 2 + \frac{1}{XY} \quad \text{ゆえに} \quad XY(X - Y + 1)(X - Y - 1) > 0$$

したがって、左下の図の領域となる (境界線を含まない).

$X - Y + 1 = \log_2 \frac{2x}{y}$, $X - Y - 1 = \log_2 \frac{x}{2y}$ に注意すると、求める領域 (x, y) は右下の図の領域となる (境界線を含まない).

$$\log_2 x \log_2 y \log_2 \frac{2x}{y} \log_2 \frac{x}{2y} > 0$$



補足 (*) $\log_2 x \log_2 y \log_2 \frac{2x}{y} \log_2 \frac{x}{2y} > 0$ より $(x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1)$,

領域の境界線は

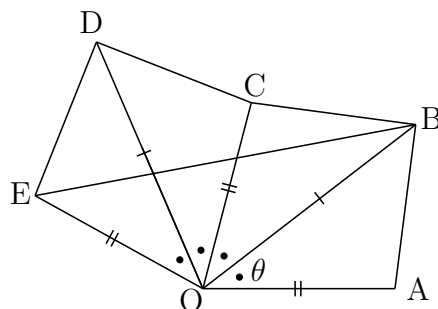
$$x = 0, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad y = 1, \quad \frac{2x}{y} = 1, \quad \frac{x}{2y} = 1$$

たとえば、点 $(2, 2)$ は (*) を満たさない. 領域は、境界を挟み互い違いに定まる.



- 4 $\theta = \angle AOB$, $a = OA$, $b = OB$ とすると,
 $0 < \theta < \pi$ より

$$\begin{aligned}\triangle OAB &= \frac{1}{2}ab \sin \theta, \\ \triangle OBE &= \frac{1}{2}ab |\sin 3\theta|\end{aligned}$$



$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$ であるから

$$\frac{\triangle OBE}{\triangle OAB} = \frac{|3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta|}{\sin \theta} = |3 - 4 \sin^2 \theta|$$

$0 < \theta < \pi$ より $-1 \leq 3 - 4 \sin^2 \theta < 3$ であるから, $\triangle OBE$ の面積が $\triangle OAB$ の面積の $\frac{3}{2}$ 倍になるとき

$$3 - 4 \sin^2 \theta = \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin^2 \theta = \frac{3}{8}$$

$$\sin \theta > 0 \text{ であるから} \quad \sin \angle AOB = \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{4}$$



5 $n \geq 2$ のとき, $(p^n)! = 1 \cdot 2 \cdots (p^n - 1)p^n$ より, p^n 個の自然数

$$1, 2, \dots, p^n - 1, p^n$$

について, p^k で割り切れるが, p^{k+1} で割り切れない個数は

$$\frac{p^n}{p^k} - \frac{p^n}{p^{k+1}} = p^{n-k} - p^{n-k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

p^n で割り切れるものが 1 個あるから, $(p^n)!$ が p で割り切れる回数を N とすると

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^{n-1} k(p^{n-k} - p^{n-k-1}) + n \cdot 1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \{kp^{n-k} - (k+1)p^{n-(k+1)}\} + \sum_{k=1}^{n-1} p^{n-k-1} + n \\ &= p^{n-1} - n + \sum_{k=1}^{n-1} p^{n-1-k} + n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} p^k = \frac{p^n - 1}{p - 1} \end{aligned}$$

$n = 1$ のとき, $p!$ は p で割り切れる回数は 1 であるから, 上式は $n = 1$ のときも成立する. よって, $(p^n)!$ が p で割り切れる回数は

$$\frac{p^n - 1}{p - 1}$$

別解 p^n 個の自然数 $1, 2, \dots, p^n - 1, p^n$ について

p で割り切れる個数は $\frac{p^n}{p}$ 個あり, それらを p で 1 回ずつ割る

p^2 で割り切れる個数は $\frac{p^n}{p^2}$ 個あり, それらを p で 1 回ずつ割る

$\vdots$

p^k で割り切れる個数は $\frac{p^n}{p^k}$ 個あり, それらを p で 1 回ずつ割る

$\vdots$

p^n で割り切れる個数は 1 個あり, それを p で 1 回割る

よって, 求める回数は

$$\sum_{k=1}^n \frac{p^n}{p^k} = \sum_{k=1}^n p^{n-k} = \frac{p^n - 1}{p - 1}$$

■