

平成 18 年度 京都大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系), 文, 教育 (文系), 法, 経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

- 1 放物線 $C: y = x^2$ と 2 直線 $l_1: y = px - 1$, $l_2: y = -x - p + 4$ は 1 点で交わるという. このとき実数 p の値を求めよ.
- 2 座標空間に 4 点 $A(2, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 2)$, $D(1, 3, 7)$ がある. 3 点 A, B, C を通る平面に関して点 D と対称な点を E とするとき, 点 E の座標を求めよ.
- 3 $Q(x)$ を 2 次式とする. 整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが, $\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという. このとき 2 次方程式 $Q(x) = 0$ は重解を持つことを示せ.
- 4 関数 $y = f(x)$ のグラフは, 座標平面で原点に関して点対称である. さらにこのグラフの $x \leq 0$ の部分は, 軸が y 軸に平行で, 点 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ を頂点とし, 原点を通る放物線と一致している. このとき $x = -1$ におけるこの関数の接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ.
- 5 n, k は自然数で $k \leq n$ とする. 穴のあいた $2k$ 個の白玉と $2n - 2k$ 個の黒玉にひもを通して輪を作る. このとき適当な 2 箇所ではひもを切って n 個ずつの 2 組に分け, どちらの組も白玉 k 個, 黒玉 $n - k$ 個からなるようにできることを示せ.

解答例

1 l_1, l_2 の方程式から y を消去すると $(1+p)x = 5-p$

$$p = -1 \text{ は上式を満たさないから } x = \frac{5-p}{1+p}$$

$$\text{これを } l_1 \text{ に代入すると } y = p \left(\frac{5-p}{1+p} \right) - 1 = \frac{-p^2 + 4p - 1}{1+p}$$

l_1 と l_2 の交点 $\left(\frac{5-p}{1+p}, \frac{-p^2 + 4p - 1}{1+p} \right)$ が放物線 $C: y = x^2$ 上にあるから

$$\frac{-p^2 + 4p - 1}{1+p} = \left(\frac{5-p}{1+p} \right)^2 \quad \text{整理すると } p^3 - 2p^2 - 13p + 26 = 0$$

したがって $(p-2)(p^2-13) = 0$ これを解いて $p = 2, \pm\sqrt{13}$ ■

2 A(2, 1, 0), B(1, 0, 1), C(0, 1, 2), D(1, 3, 7) より

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 1), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2), \quad \overrightarrow{AD} = (-1, 2, 7)$$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ の両方に垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{n} = (1, 0, 1)$$

とおき, $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\vec{n}$ とすると

$$\begin{aligned} (-1, 2, 7) &= \alpha(-1, -1, 1) + \beta(-2, 0, 2) + \gamma(1, 0, 1) \\ &= (-\alpha - 2\beta + \gamma, -\alpha, \alpha + 2\beta + \gamma) \end{aligned}$$

$$\text{したがって } \begin{cases} -\alpha - 2\beta + \gamma = -1 \\ -\alpha = 2 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 7 \end{cases} \quad \text{これを解いて } \alpha = -2, \beta = 3, \gamma = 3$$

求める点 E は

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} - \gamma\vec{n} \\ &= -2(-1, -1, 1) + 3(-2, 0, 2) - 3(1, 0, 1) \\ &= (-7, 2, 1) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = (2, 1, 0) + (-7, 2, 1) = (-5, 3, 1)$$

よって $E(-5, 3, 1)$ ■

3 $P(x)$ を 2 次式 $Q(x)$ で割った商を $A(x)$, 余りを $R(x)$ とすると

$$(*) \quad P(x) = Q(x)A(x) + R(x) \quad (R(x) \text{ は } 0 \text{ でない } 1 \text{ 次以下の整式})$$

この両辺を平方すると

$$\begin{aligned} P(x)^2 &= \{Q(x)A(x)\}^2 + 2Q(x)A(x)R(x) + R(x)^2 \\ &= Q(x)\{Q(x)A(x)^2 + 2A(x)R(x)\} + R(x)^2 \end{aligned}$$

$P(x)^2$ は $Q(x)$ で割り切れるから, $R(x)^2$ は 2 次式 $Q(x)$ で割り切れる.

このとき, $R(x)^2$ は 2 次以下の整式であるから, 定数 k を用いて

$$(**) \quad R(x)^2 = kQ(x)$$

上式において, $k = 0$ とすると, $R(x) = 0$ となり, $(*)$ に反するので不適.

したがって $Q(x) = \frac{1}{k}R(x)^2$ よって $Q(x)$ は重解 $R^{-1}(0)$ をもつ.

別解 (背理法による証明)

2 次式 $Q(x)$ が重解をもたない, すなわち

$$Q(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) \quad (a \neq 0, \alpha \neq \beta)$$

とすると, $P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れないから

$$P(\alpha) \neq 0 \quad \text{または} \quad P(\beta) \neq 0 \tag{A}$$

一方, $P(x)^2$ は $Q(x)$ で割り切れるから

$$P(\alpha)^2 = 0, \quad P(\beta)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad P(\alpha) = 0, \quad P(\beta) = 0$$

これは, (A) と矛盾する. (証終) ■

4 点 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ を頂点とする放物線を $y = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ とおくと,

これが原点を通るから $a = -1$ ゆえに $y = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \quad (x \leq 0)$

$y = f(x)$ のグラフは原点に関して対称であるから

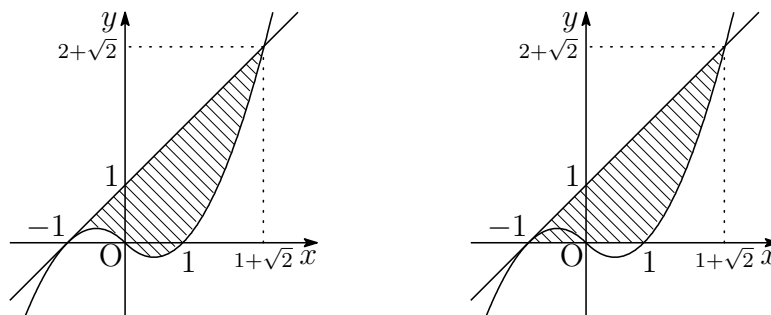
$$f(x) = \begin{cases} -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} & (x \leq 0) \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} & (x \geq 0) \end{cases}$$

$f(-1) = 0, f'(x) = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ より $(x \leq 0), f'(-1) = 1$

$x = -1$ における接線は、点 $(-1, 0)$ を通り、傾き 1 の直線であるから

$$y = x + 1$$

求める面積は、左図の斜線部分の面積で、右図の斜線部分の面積と等しい。



$x \geq 0$ において、直線 $y = x + 1$ と $y = f(x) = x^2 - x$ の交点の x 座標は

$$x + 1 = x^2 - x \quad \text{整理すると} \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

$x \geq 0$ に注意してこれを解くと $x = 1 + \sqrt{2}$ ゆえに 接点は $(1 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$

よって、求める面積は

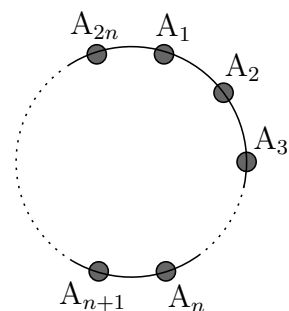
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})^2 - \int_1^{1+\sqrt{2}} (x^2 - x) dx &= 3 + 2\sqrt{2} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_1^{1+\sqrt{2}} \\ &= 2 + \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

■

5 $2n$ 個の玉を時計回りに $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ とする.
 $A_j, A_{j+1}, \dots, A_{n+j-1}$ の n 個の玉の中にある白玉の
 個数を a_j とする ($j = 1, 2, \dots, n+1$).

- $a_1 = k$ のとき, 題意は成立する.
- $a_1 < k$ のとき, $a_1 + a_{n+1} = 2k$ より $a_{n+1} > k$
 a_{j+1} は $a_j - 1, a_j, a_j + 1$ のいずれかである.
 したがって, 数列 $\{a_j\}$ の a_2 から a_n の中で k
 となるものが少なくとも 1 つある.
- $a_1 > k$ のときも同様である.

以上のことから, 本題は成立する.



■