平成 17 年度　京都大学　2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
総合人間 (文系)，文，教育 (文系)，法，経済 (文系)

問題 1 2 3 4 5

1 xy 平面上の原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分 (両端を含む) を L とする．曲線 $y = x^2 + ax + b$ が L と共有点を持つような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ．

2 $2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか．

ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ である．

3 $\alpha,\ \beta$ は 0 でない相異なる複素数で，

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = 2$$

を満たすとする．このとき，$0,\ \alpha,\ \beta$ の表す複素平面上の 3 点を結んで得られる三角形はどのような三角形か．(ただし，複素数 z に対し，$\overline{z}$ は z に共役な複素数である．また，複素平面を複素数平面ともいう．)

4 $a^3 - b^3 = 65$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

5 1 から n までの番号のついた n 枚の札が袋に入っている．ただし $n \geqq 3$ とし，同じ番号の札はないとする．この袋から 3 枚の札を取り出して，札の番号を大きさの順に並べるとき，等差数列になっている確率を求めよ．

解答例

1 曲線 $y = x^2 + ax + b$ と線分 $L : y = 2x \ (0 \leqq x \leqq 1)$ の 2 式から y を消去すると

$$x^2 + ax + b = 2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + (a-2)x + b = 0$$

上の第 2 式が $0 \leqq x \leqq 1$ に解をもつ条件を求めればよい.

$f(x) = x^2 + (a-2)x + b$ とすると

$$f(x) = \left(x - \frac{2-a}{2}\right)^2 + b - \frac{1}{4}(a-2)^2$$

$f(x) = 0$ が $0 \leqq x \leqq 1$ に解をもつ条件は，次の (i) または (ii) である.

(i) $f(0)f(1) \leqq 0$

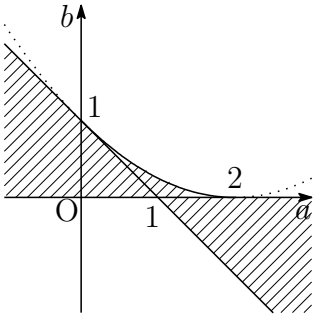
(ii) $f(0) > 0,\ f(1) > 0,\ 0 \leqq \dfrac{2-a}{2} \leqq 1,\ b - \dfrac{1}{4}(a-2)^2 \leqq 0$

すなわち

(i) $b(a+b-1) \leqq 0$

(ii) $b > 0,\ a+b-1 > 0,\ 0 < a < 2,\ b \leqq \dfrac{1}{4}(a-2)^2$

よって，求める点 $(a,\ b)$ の満たす領域は，下の図の斜線部分で境界線を含む.



■

2 $2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ より　$10\log_{10}2 < (1-3\log_{10}2)n < 20\log_{10}2$

$$\frac{10\log_{10}2}{1-3\log_{10}2} < n < \frac{20\log_{10}2}{1-3\log_{10}2}$$

$A = \dfrac{10\log_{10}2}{1-3\log_{10}2}$ とおくと　　$A < n < 2A$　$\cdots(*)$

$0.301 < \log_{10}2 < 0.3011$ より　$1-3\times0.301 > 1-3\log_{10}2 > 1-3\times0.3011$

$$0.097 > 1-3\log_{10}2 > 0.0967$$
$$\frac{10\times0.301}{0.097} < \frac{10\log_{10}2}{1-3\log_{10}3} < \frac{10\times0.3011}{0.0967}$$
$$\frac{3010}{97} < \frac{10\log_{10}2}{1-3\log_{10}3} < \frac{30110}{967}$$

$\dfrac{3010}{97} = 31+\dfrac{3}{97}$, $\dfrac{30110}{967} = 31+\dfrac{133}{967}$ より

$$31+\frac{3}{97} < A < 31+\frac{133}{967}, \quad 62+\frac{6}{97} < 2A < 62+\frac{266}{967}$$

よって，$(*)$ を満たす自然数は，32 以上 62 以下の **31** 個. ■

3 $z = \dfrac{\alpha}{\beta}$ とおくと　$z+\overline{z}=2$　ゆえに　$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} = 1$

したがって，実数 k を用いて　$\dfrac{\alpha}{\beta} = 1+ki$

$\alpha \neq \beta$ であるから，$k \neq 0$ である．上式から　$\dfrac{\alpha-\beta}{\beta} = ki$

よって，3 点 0, α, β を結んで得られる三角形は $\angle 0\beta\alpha$ が直角の**直角三角形**. ■

4 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=65=5\cdot13>0$ より，$a>b$ であるから

$$(a-b,\ a^2+ab+b^2)=(1,\ 65),\ (5,\ 13),\ (13,\ 5),\ (65,\ 1)$$

(i) $(a-b,\ a^2+ab+b^2)=(1,\ 65)$ のとき，$a=b+1$ より

$$(b+1)^2+(b+1)b+b^2=65 \quad \text{整理すると} \quad 3b(b+1)=64$$

64 は 3 の倍数でないから，不適．

(ii) $(a-b,\ a^2+ab+b^2)=(5,\ 13)$ のとき，$a=b+5$ より

$$(b+5)^2+(b+5)b+b^2=13 \quad \text{整理すると} \quad b^2+5b+4=0$$

ゆえに $(b+1)(b+4)=0$ これを解いて $b=-1,-4$

したがって $(a,\ b)=(4,-1),\ (1,-4)$

(iii) $(a-b,\ a^2+ab+b^2)=(13,\ 5)$ のとき，$a=b+13$ より

$$(b+13)^2+(b+13)b+b^2=5 \quad \text{整理すると} \quad 3b(b+13)=-164$$

164 は 3 の倍数でないから，不適．

(iv) $(a-b,\ a^2+ab+b^2)=(65,\ 1)$ のとき，$a=b+65$ より

$$(b+65)^2+(b+65)b+b^2=1 \quad \text{整理すると} \quad 3b^2+3\cdot65b+65^2-1=0$$

係数について，$D=9\cdot65^2-4\cdot3(65^2-1)=3(4-65^2)<0$ より，不適．

(i)〜(iv) より $\quad \boldsymbol{(a,\ b)=(4,-1),\ (1,-4)}$ ■

5 3 整数 $a,\ b,\ c$ の順に等差数列をなすとき $\quad a+c=2b$

このとき，a と c の偶奇が一致し，b は a と c によって 1 通りに定まる．

(i) n が偶数のとき，$n=2m$ とおくと，奇数，偶数ともに m 個あるから

$$\frac{{}_m\mathrm{C}_2+{}_m\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{1}{2}m(m-1)+\frac{1}{2}m(m-1)}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}=\frac{6m(m-1)}{n(n-1)(n-2)}$$
$$=\frac{6\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)}{n(n-1)(n-2)}=\boldsymbol{\frac{3}{2(n-1)}}$$

(ii) n が奇数のとき，$n=2m+1$ とおくと，奇数が $m+1$ 個，偶数が m 個あるから

$$\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_2+{}_m\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{1}{2}(m+1)m+\frac{1}{2}m(m-1)}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}=\frac{6m^2}{n(n-1)(n-2)}$$
$$=\frac{6\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}{n(n-1)(n-2)}=\boldsymbol{\frac{3(n-1)}{2n(n-2)}}$$

■