

平成16年度 京都大学 2次試験前期日程 (数学問題)120分
総合人間(文系), 文, 教育(文系), 法, 経済(文系)

問題 1 2 3 4 5

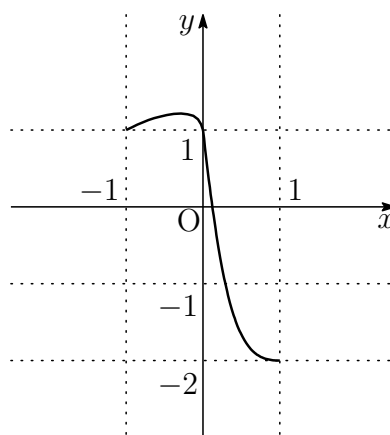
1 $f(\theta) = \cos 4\theta - 4\sin^2 \theta$

とする. $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ.

2 区間 $-1 \leq x \leq 1$ で定義された関数 $f(x)$ が,

$$f(-1) = f(0) = 1, \quad f(1) = -2$$

を満たし, またそのグラフが下図のようになっているという.



このとき,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \geq -1$$

を示せ.

3 $\triangle OAB$ において, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする.

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 5, \quad \cos(\angle AOB) = \frac{3}{5}$$

とする. このとき, $\angle AOB$ の2等分線と, Bを中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円との交点の, Oを原点とする位置ベクトルを, $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いてあらわせ.

4 c を実数とする. x についての2次方程式

$$x^2 + (3 - 2c)x + c^2 + 5 = 0$$

が2つの解 α , β を持つとする. 複素平面上の3点 α , β , c^2 が3角形の3頂点になり, その3角形の重心は0であるという. c を求めよ.

5 n, a, b を 0 以上の整数とする. a, b を未知数とする方程式

$$(*) \quad a^2 + b^2 = 2^n$$

を考える.

- (1) $n \geq 2$ とする. a, b が方程式 $(*)$ を満たすならば, a, b はともに偶数であることを証明せよ. (ただし, 0 は偶数に含める.)
- (2) 0 以上の整数 n に対して, 方程式 $(*)$ を満たす 0 以上の整数の組 (a, b) をすべて求めよ.

解答例

1 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ より, $-1 \leq \cos 2\theta \leq 1$ であるから

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos 4\theta - 4\sin^2 \theta = 2\cos^2 2\theta - 1 - 4 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= 2\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta - 3 \\ &= 2 \left(\cos 2\theta + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

よって, $\cos 2\theta = 1$ のとき, **最大値 1**, $\cos 2\theta = -\frac{1}{2}$ のとき, **最小値 $-\frac{7}{2}$** ■

2 $-1 \leq x \leq 0$ において $f(x) \geq 1$, $0 \leq x \leq 1$ において $f(x) \geq -2$ であるから

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \\ &\geq \int_{-1}^0 1 dx + \int_0^1 (-2) dx = 1 + (-2) = -1 \end{aligned}$$

■

3 $\angle AOB$ の二等分線の方方向ベクトルを $\vec{v} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ とすると

$$\begin{aligned} |\vec{v}|^2 &= \left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right|^2 = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} + 2 \cdot \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} + \frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2} \\ &= 2 + 2 \cos(\angle AOB) = 2 + 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = 3, \quad |\vec{b}| = 5 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle AOB) = 3 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 9 \text{ より}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{b} = \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} + |\vec{b}| = \frac{9}{3} + 5 = 8$$

求める交点を P とし, $\overrightarrow{OP} = k\vec{v}$ とおくと (k は実数)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BP}|^2 &= |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}|^2 = |k\vec{v} - \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{v}|^2 k^2 - 2(\vec{v} \cdot \vec{b})k + |\vec{b}|^2 = \frac{16}{5} k^2 - 16k + 25 \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{BP}|^2 = 10 \text{ であるから } \frac{16}{5} k^2 - 16k + 25 = 10$$

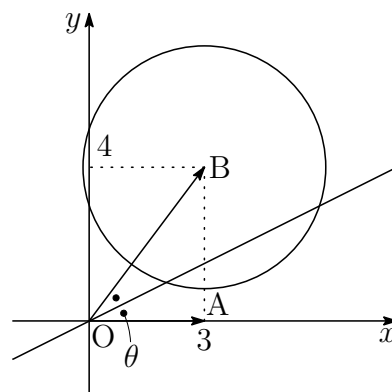
$$k^2 - 5k + \frac{75}{16} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{5}{4}, \frac{15}{4}$$

$$\text{よって} \quad \frac{5}{4} \left(\frac{\vec{a}}{3} + \frac{\vec{b}}{5} \right) = \frac{5}{12} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{b}, \quad \frac{15}{4} \left(\frac{\vec{a}}{3} + \frac{\vec{b}}{5} \right) = \frac{5}{4} \vec{a} + \frac{3}{4} \vec{b}$$

別解 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $\cos(\angle AOB) = \frac{3}{5}$ により,
 $\angle OAB = 90^\circ$ である. 座標平面上に $A(3, 0)$,
 $B(3, 4)$ をとり, $\angle AOB$ の 2 等分線の偏角を θ
 とすると ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{4}{3}$$

これを解いて $\tan \theta = \frac{1}{2}$



$\angle AOB$ の 2 等分線および B を中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円の方程式は

$$x - 2y = 0, \quad (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$$

したがって, これらの交点の座標は $(2, 1), (6, 3)$

また, $(1, 0) = \frac{1}{3}\vec{a}$, $(0, 1) = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a})$ であるから

$$(2, 1) = 2(1, 0) + (0, 1) = 2 \cdot \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b},$$

$$(6, 3) = 3(2, 1) = 3 \left(\frac{5}{12}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \right) = \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

■

4 解と係数の関係により $\alpha + \beta = 2c - 3 \cdots \textcircled{1}$

3 点 α, β, c^2 の重心が 0 であるから $\alpha + \beta + c^2 = 0 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ を $\textcircled{2}$ に代入すると $2c - 3 + c^2 = 0$

$$(c + 3)(c - 1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad c = -3, 1$$

(i) $c = -3$ のとき, 与えられた方程式は $x^2 + 9x + 14 = 0$

このとき, 3 点 $-7, -2, 9$ は一直線にあり, 不適.

(ii) $c = 1$ のとき, 与えられた方程式は $x^2 + x + 6 = 0$

このとき, 3 点 $\frac{-1 + \sqrt{23}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{23}i}{2}, 1$ は条件を満たす.

よって $c = 1$

補足 次の必要条件を踏まえて, c を決定するよりも, c の候補が 2 つだけなので, 求めた c の十分性を確認した方が簡単である.

- 方程式 $x^2 + (3 - 2c)x + c^2 + 5 = 0$ が虚数解をもつこと.

- 共役な複素数 α, β の中点が c^2 に一致しないこと.

■

5 (1) (*) $a^2 + b^2 = 2^n$

$n \geq 2$ のとき, (*) の右辺は 4 で割り切れ, a, b の偶奇は一致する.

a, b がともに奇数であるとき, $a-1, a+1$ は連続する偶数であるから, 一方は 4 の倍数で $(a-1)(a+1)$ は 4 の倍数である. 同様に, $(b-1)(b+1)$ も 4 の倍数である. したがって, (*) の左辺

$$a^2 + b^2 = (a-1)(a+1) + (b-1)(b+1) + 2$$

は 4 で割り切れず (余りが 2), (*) が 4 で割り切れることに反する.
よって, a, b はともに偶数である.

別解 $n \geq 2$ のとき $2^n \equiv 0 \pmod{4}$... ①

(*) の右辺が偶数であるから, a, b の偶奇は一致する.

a が奇数であるとき $a \equiv 1$ または $a \equiv -1 \pmod{4}$

このとき $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$

a, b がともに奇数であるとき $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{4}$... ②

①, ② により, a, b はともに奇数ではない.

よって, a, b はともに偶数である.

(2) (1) の結論から, 2^n が 4 の倍数であるとき, a, b はともに偶数, すなわち, $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$ は整数であるから

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 2^{n-2}$$

さらに, 2^{n-2} が 4 の倍数であるとき, $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$ はともに偶数, すなわち, $\frac{a}{4}, \frac{b}{4}$ は整数である.

$$\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{b}{4}\right)^2 = 2^{n-4}$$

この操作を続けると, n の偶奇により次ようになる.

(i) n が偶数のとき

$$\left(\frac{a}{2^{\frac{n}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{b}{2^{\frac{n}{2}}}\right)^2 = 1$$

$\frac{a}{2^{\frac{n}{2}}}, \frac{b}{2^{\frac{n}{2}}}$ は, とともに整数であるから $\left(\frac{a}{2^{\frac{n}{2}}}, \frac{b}{2^{\frac{n}{2}}}\right) = (1, 0), (0, 1)$

よって $(a, b) = (2^{\frac{n}{2}}, 0), (0, 2^{\frac{n}{2}})$

(ii) n が奇数のとき

$$\left(\frac{a}{2^{\frac{n-1}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{b}{2^{\frac{n-1}{2}}}\right)^2 = 2$$

$\frac{a}{2^{\frac{n-1}{2}}}, \frac{b}{2^{\frac{n-1}{2}}}$ は, ともに整数であるから $\left(\frac{a}{2^{\frac{n-1}{2}}}, \frac{b}{2^{\frac{n-1}{2}}}\right) = (1, 1)$

よって $(a, b) = (2^{\frac{n-1}{2}}, 2^{\frac{n-1}{2}})$ ■