平成15年度　京都大学　２次試験前期日程(数学問題)120分
総合人間(文系)，文，教育(文系)，法，経済(文系)

問題 1 2 3 4 5

1 $\dfrac{23}{111}$ を $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ のように小数で表す．すなわち小数第 k 位の数を a_k とする．このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}$ を求めよ．

2 xy 平面上で，放物線 $C : y = x^2 + x$ と，直線 $l : y = kx + k - 1$ を考える．このとき次の問に答えよ．

(1) 放物線 C と直線 l が相異なる2点で交わるような k の範囲を求めよ．

(2) 放物線 C と直線 l の2つの交点を P，Q とし，線分 PQ の長さを L，線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする．k が (1) で定まる範囲を動くとき，$\dfrac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ．

3 四面体 OABC は次の2つの条件

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(ii) 4つの面の面積がすべて等しい

をみたしている．このとき，この四面体は正四面体であることを示せ．

4 p は3以上の素数であり，x，y は $0 \leqq x \leqq p$，$0 \leqq y \leqq p$ をみたす整数であるとする．このとき x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ，$x = y$ であることを示せ．

5 4チームがリーグ戦を行う．すなわち，各チームは他のすべてのチームとそれぞれ1回ずつ対戦する．引き分けはないものとし，勝つ確率はすべて $\dfrac{1}{2}$ で，各回の勝敗は独立に決まるものとする．勝ち数の多い順に順位をつけ，勝ち数が同じであればそれらは同順位とする．1位のチーム数の期待値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ $\dfrac{23}{111}=0.\dot{2}0\dot{7}$ より　　$a_{3j-2}=2,\quad a_{3j-1}=0,\quad a_{3j}=7\quad$ (j は自然数)

まず，$S_m=1+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{3^{3(m-1)}}$ とおくと

$$S_m=\frac{1-\dfrac{1}{3^{3m}}}{1-\dfrac{1}{3^3}}=\frac{27}{26}\left(1-\frac{1}{3^{3m}}\right)$$

(i) $n=3m$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}&=a_1S_m+a_3S_m\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{26}\left(1-\frac{1}{3^{3m}}\right)+\frac{7}{3^3}\cdot\frac{27}{26}\left(1-\frac{1}{3^{3m}}\right)\\&=\frac{25}{26}\left(1-\frac{1}{3^{3m}}\right)\end{aligned}$$

(ii) $n=3m+1,\ 3m+2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}&=a_1S_{m+1}+a_3S_m\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{26}\left(1-\frac{1}{3^{3(m+1)}}\right)+\frac{7}{3^3}\cdot\frac{27}{26}\left(1-\frac{1}{3^{3m}}\right)\\&=\frac{25}{26}-\frac{23}{26\cdot3^{3m+1}}\end{aligned}$$

(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}=\begin{cases}\dfrac{25}{26}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right) & (n\equiv 0 \pmod 3)\\[2mm] \dfrac{25}{26}-\dfrac{23}{26\cdot3^n} & (n\equiv 1 \pmod 3)\\[2mm] \dfrac{25}{26}-\dfrac{23}{26\cdot3^{n-1}} & (n\equiv 2 \pmod 3)\end{cases}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $C: y = x^2 + x$，$l: y = kx + k - 1$ の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2 - (k-1)x - (k-1) = 0 \qquad (*)$$

C と l が異なる 2 点で交わるから，方程式 $(*)$ の判別式 D は

$$D = (k-1)^2 + 4(k-1) = (k+3)(k-1) > 0$$

よって　　$\boldsymbol{k < -3,\ 1 < k}$

(2) 方程式 $(*)$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると $(\alpha < \beta)$

$$x^2 - (k-1)x - (k-1) = (x-\alpha)(x-\beta)$$

また，交点 P，Q の x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると，$\mathrm{P}(\alpha,\ k\alpha + k - 1)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ k\beta + k - 1)$ より

$$L = \mathrm{PQ} = (\beta - \alpha)\sqrt{1 + k^2}$$

線分 PQ と放物線 C で囲まれる部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{(kx + k - 1) - (x^2 + x)\}\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta \{x^2 - (k-1)x - (k-1)\}\,dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \end{aligned}$$

したがって　　$\dfrac{S}{L^3} = \dfrac{1}{6(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$

(1) の結果より，$k^2 > 1$ であるから　$0 < \dfrac{1}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} < \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

よって　　$\boldsymbol{0 < \dfrac{S}{L^3} < \dfrac{\sqrt{2}}{24}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0,\quad \vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a} \tag{$*$}$$

$\triangle$OAB, $\triangle$OBC, $\triangle$OCA の面積が等しいから

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{c}\cdot\vec{a})^2}$$

したがって　$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2=|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{c}\cdot\vec{a})^2$

$(*)$ より　$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2=|\vec{b}||\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2$　ゆえに　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$

以上から，O を始点するベクトルを用いて，次の結果が得られた．

$$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC} \tag{$**$}$$

対称性により，A，B をそれぞれ始点とするベクトルを用いて，次式を得る．

$$\mathrm{AO}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC},\quad \mathrm{BO}=\mathrm{BA}=\mathrm{BC} \tag{$***$}$$

$(**)$，$(***)$ より，四面体のすべての辺の長さが等しいから，正四面体である．

■

$\boxed{\mathbf{4}}$ x^2 を $2p$ で割った余りと y^2 を $2p$ で割った余りが等しいから (p は奇素数)

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)\equiv 0 \pmod{2p} \tag{$*$}$$

x, y は $0\leqq x\leqq p$, $0\leqq y\leqq p$ を満たす整数で

$$x+y=(x-y)+2y$$

であるから，$x+y$ と $x-y$ の偶奇は一致する．さらに $(*)$ より，これらはともに偶数で一方は p も因数にもつから

$$x+y\equiv 0 \quad \text{または} \quad x-y\equiv 0 \pmod{2p}$$

(i) $x+y\equiv 0 \pmod{2p}$ のとき，$0\leqq x+y\leqq 2p$ であるから

$$x+y=0 \quad \text{または} \quad x+y=2p \quad \text{すなわち} \quad x=y=0 \quad \text{または} \quad x=y=p$$

(ii) $x-y\equiv 0 \pmod{2p}$ のとき，$-p\leqq x-y\leqq p$ であるから

$$x-y=0 \quad \text{すなわち} \quad x=y$$

(i)，(ii) より　$x=y$ ■

5 4チームをA，B，C，Dとして，下の図では矢印の向きを勝者に向け，勝敗に無関係な対戦については矢印を付けていない．

(i) 1位が1チームの場合(図ではAチーム)

1位がAであるとき，Aは3戦全勝し，その確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ で，全勝するチームの場合の数が4通りあるから，1位が1チームである確率は

$$p_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 4 = \frac{1}{2}$$

(ii) 1位が2チームの場合(図ではA，B)

1位2チームをA，Bとすると，2チームの対戦成績は2勝1である．AはBに勝ち，Cに敗けたとすると，他の勝敗は下の図のように一意的に定まる．全6試合の確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$ で，これらに対応する場合の数が4! 通りあるから，1位が2チームである確率は

$$p_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times 4! = \frac{3}{8}$$

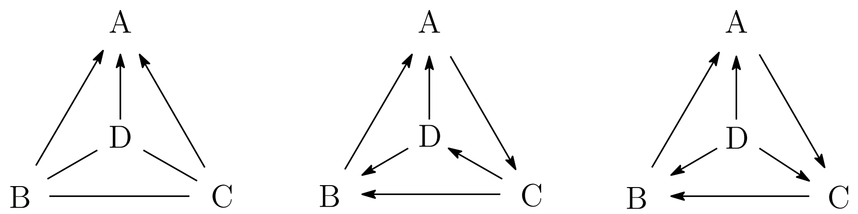
(iii) 1位が3チームの場合(図ではA，B，C)

1位3チームをA，B，Cとすると，3チームの対戦成績は2勝1である．AはBに勝ち，Cに敗けたとすると，他の勝敗は下の図のように一意的に定まる．全6試合の確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$ で，全敗するDの選び方4通りに対し，1位3チームの選び方は対称性により2! 通り(円順列)であるから，1位が3チームである確率は(p_1，p_2 から p_3 を求めてもよい)

$$p_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times 4 \times 2! = \frac{1}{8}$$

(iv) 全試合数が6試合であるから，1位が4チームになることはない．

(i) 1チーム(A)　　(ii) 2チーム(A,B)　　(iii) 3チーム(A,B,C)



よって，求める期待値は　$1p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 1\cdot\dfrac{1}{2} + 2\cdot\dfrac{3}{8} + 3\cdot\dfrac{1}{8} = \boldsymbol{\dfrac{13}{8}}$ ■