

令和7年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・
国際人間科学(環境共生(理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 k を実数とする. $f(x)$ と $g(x)$ を

$$f(x) = |x^3 - x|, \quad g(x) = k(x + 1)$$

とおき, 曲線 $y = f(x)$ を C , 直線 $y = g(x)$ を ℓ とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 曲線 C の概形をかけ. ただし, 関数 $f(x)$ の極大値を調べる必要はない.
- (2) 曲線 C と直線 ℓ がちょうど4つの共有点をもつような k の値を求めよ.

2 実数 a に対して, a を超えない最大の整数を k とするとき, $a - k$ を a の小数部分という. n を自然数とし, $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$ とおく. 以下の問に答えよ.

- (1) $0 < a_n < 1$ が成り立つことを示せ.
- (2) b_n を $\left(3n - \frac{1}{a_n}\right)$ の小数部分とする. b_n を n を用いて表せ.
- (3) b_n を (2) で定めたものとする. m, n を異なる2つの自然数とすると, $a_m + b_n \neq 1$ であることを示せ.

3 媒介変数 θ を用いて

$$x = \sin \theta, \quad y = \cos \theta + |\sin \theta| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で表される曲線を C とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 曲線 C の概形をかけ.
- (2) 曲線 C で囲まれた部分の面積を求めよ.

- 4 s, t を実数とする．座標空間に 3 点

$$A(-4, -1, 0), \quad B(-3, 0, -1), \quad P(s, t, -2s + t - 1)$$

がある．以下の問に答えよ．

- (1) 3 点 A, B, P は一直線上にないことを示せ．
- (2) 点 P から直線 AB に下ろした垂線を PH とする．点 H の座標を s を用いて表せ．
- (3) s, t が変化するとき，三角形 ABP の面積の最小値を求めよ．

- 5 連続関数 $f(x)$ は $x \geq 0$ で $f(x) \geq 0$ を満たし， $x > 0$ で微分可能であり，その導関数 $f'(x)$ は連続であるとする． $t \geq 1$ を満たす t に対して，原点 O と点 $P(t, f(t))$ の距離を $g(t)$ とする．また， $t > 1$ を満たす t に対して， $y = f(x)$ ($1 \leq x \leq t$) で表される曲線の長さを $h(t)$ とし， $t = 1$ のときは $h(1) = 0$ とする．以下の問に答えよ．

- (1) $t > 1$ とする．开区間 $(1, t)$ で常に $f(x) - xf'(x) = 0$ が成り立つならば，閉区間 $[1, t]$ で $\frac{f(x)}{x}$ は定数であることを示せ．
- (2) $t \geq 1$ を満たす任意の t に対して， $g(t) = h(t) + 2$ が成り立つとする．このとき， $f(1)$ の値を求めよ．また， $t \geq 1$ のとき $f(t)$ を t を用いて表せ．

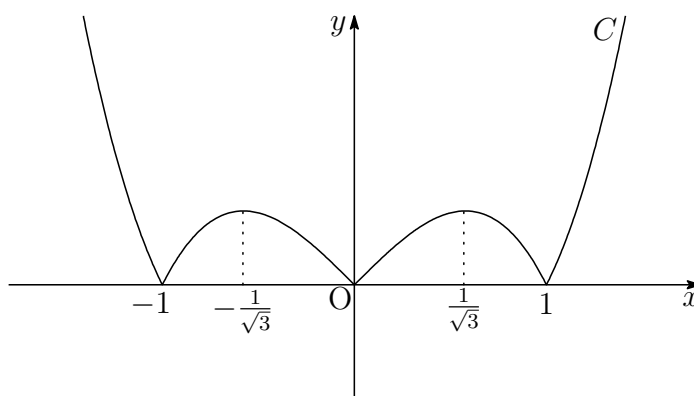
解答例

1 (1) $f(x) = |x^3 - x| = |x(x+1)(x-1)|$ より

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & (-1 \leq x \leq 0, 1 \leq x) \\ -x^3 + x & (x \leq -1, 0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1 & (-1 < x < 0, 1 < x) \\ -3x^2 + 1 & (x < -1, 0 < x < 1) \end{cases}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0	$\nearrow$



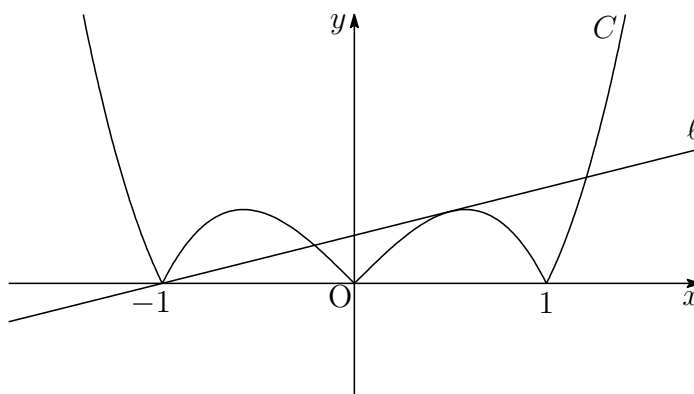
(2) 下の図のように、区間 $0 < x < 1$ において、 C と ℓ が接するときである。

$$-x^3 + x = k(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x^2 - x + k) = 0$$

$$x^2 - x + k = 0 \quad \text{より} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + k - \frac{1}{4} = 0$$

上式から、 $x = \frac{1}{2}$ でこの2次方程式が重解をもつことであるから

$$k - \frac{1}{4} = 0 \quad \text{よって} \quad k = \frac{1}{4}$$



2 (1) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$

n は自然数であるから $0 < \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \leq \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1} + 1} < 1$

よって $0 < a_n < 1$

(2) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$ より

$$\begin{aligned} 3n - \frac{1}{a_n} &= 3n - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} - n} \\ &= 3n - (\sqrt{n^2 + 1} + n) = n - (\sqrt{n^2 + 1} - n) \\ &= n - a_n = n - 1 + (1 - a_n) \end{aligned}$$

(1) の結果から, $0 < 1 - a_n < 1$ であるから, 上式より $b_n = 1 - a_n$

よって $b_n = 1 - (\sqrt{n^2 + 1} - n) = n + 1 - \sqrt{n^2 + 1}$

(3) (2) の結果から, $m \neq n$ のとき

$$\begin{aligned} a_m + b_n - 1 &= \sqrt{m^2 + 1} - m + (n + 1 - \sqrt{n^2 + 1}) - 1 \\ &= n - m - (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{m^2 + 1}) \\ &= n - m - \frac{(n^2 + 1) - (m^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{m^2 + 1}} \\ &= (n - m) \left(1 - \frac{n + m}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{m^2 + 1}} \right) \\ &= \frac{(n - m)(\sqrt{n^2 + 1} - n + \sqrt{m^2 + 1} - m)}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{m^2 + 1}} \\ &= \frac{(n - m)(a_n + a_m)}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{m^2 + 1}} \end{aligned}$$

$m \neq n$ のとき, (1) の結論から $\frac{(n - m)(a_n + a_m)}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{m^2 + 1}} \neq 0$

したがって $a_m + b_n - 1 \neq 0$ すなわち $a_m + b_n \neq 1$ ■

- 3** (1) $x = f(\theta) = \sin \theta$, $y = g(\theta) = \cos \theta + |\sin \theta|$ とおくと $(0 \leq \theta \leq \pi)$

$$f(2\pi - \theta) = -f(\theta), \quad g(2\pi - \theta) = g(\theta)$$

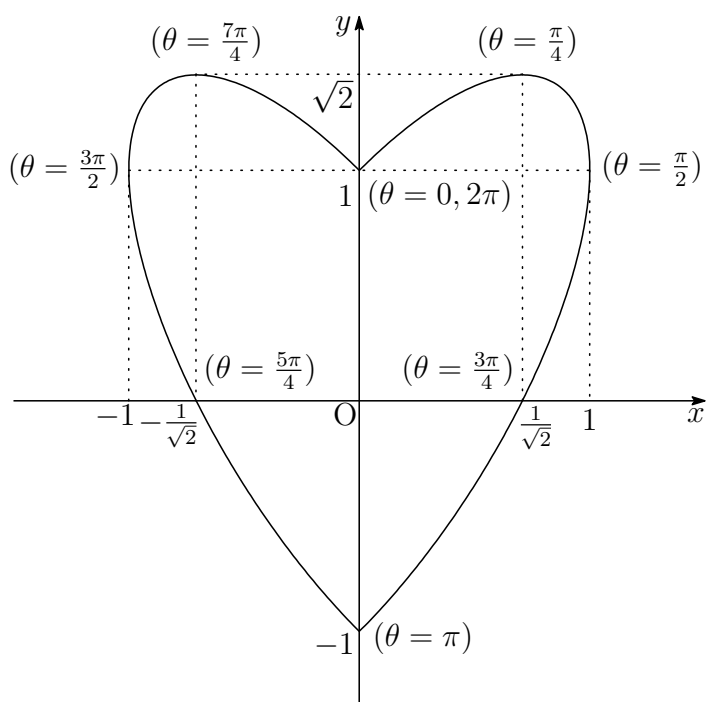
したがって、曲線 C は y 軸に関して対称であるから、 $0 \leq \theta \leq \pi$ における C を図形を元に y 軸に関して対称な図形をえがくとよい。

$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき、 $f(\theta) = \sin \theta$, $g(\theta) = \cos \theta + \sin \theta$ であるから

$$f'(\theta) = \cos \theta, \quad g'(\theta) = -\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

θ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$		+	+	+	0	-	
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	-	-	
$(\frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{d\theta})$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
(x, y)	(0, 1)		$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$		(1, 1)		(0, -1)

よって、曲線 C の概形は次のようになる。



(2) 求める面積を S とすると, C の図形が y 軸に関して対称であるから

$$\begin{aligned}
 \frac{S}{2} &= \int_{g(\pi)}^{g(\frac{\pi}{4})} x \, dy - \int_{g(0)}^{g(\frac{\pi}{4})} x \, dy = - \int_{g(0)}^{g(\pi)} x \, dy \\
 &= - \int_0^\pi f(\theta) g'(\theta) d\theta = - \int_0^\pi \sin \theta (-\sin \theta + \cos \theta) d\theta \\
 &= \int_0^\pi (\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) d\theta \\
 &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) d\theta \\
 &= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

よって $S = \pi$

別解 $xy' - x'y = \sin \theta (-\sin \theta + \cos \theta) - \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) = -1$ であるから,
 ガウス・グリーンの定理により (積分区間は回転角の正の向きにとる)

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \int_\pi^0 (xy' - x'y) d\theta = \frac{1}{2} \int_\pi^0 (-1) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

よって $S = \pi$



類題 神戸大理系 2023 年 [5]

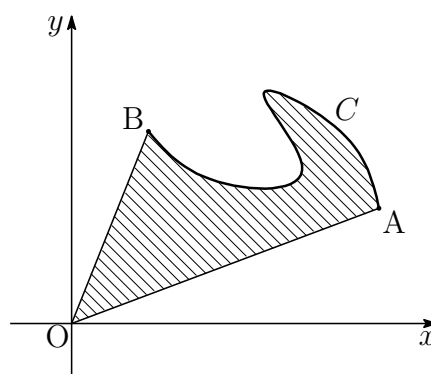
http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2023.pdf [5]

ガウス・グリーンの定理

ガウス・グリーンの定理

曲線 $C: x = f(t), y = g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$)
 について, $t = \alpha, \beta$ に対応する点をそれぞれ
 A, B とする. C と直線 OA, OB で
 囲まれた部分の面積を S とすると
 (OB の偏角 $>$ OA の偏角)

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} dt$$



証明 O を原点とする. C 上の 2 点 $P(f(t), g(t))$, $Q(f(t + \Delta t), g(t + \Delta t))$ をとり
 (OQ の偏角 $>$ OP の偏角), $\triangle OPQ$ の面積を ΔS とすると

$$\begin{aligned} 2\Delta S &= f(t)g(t + \Delta t) - f(t + \Delta t)g(t) \\ &= f(t)\{g(t + \Delta t) - g(t)\} - \{f(t + \Delta t) - f(t)\}g(t) \\ \frac{2\Delta S}{\Delta t} &= f(t) \cdot \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} - \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \cdot g(t) \end{aligned}$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \text{ とすると } 2 \frac{dS}{dt} = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$$

$t = \alpha, \beta$ に対応する点をそれぞれ A, B とする. C と直線 OA, OB で囲まれた
 部分の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)\} dt$$

証終

- 4 (1) $A(-4, -1, 0)$, $B(-3, 0, -1)$, $P(s, t, -2s + t - 1)$ より

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1), \quad \overrightarrow{AP} = (s + 4, t + 1, -2s + t - 1)$$

3点 A , B , P が一直線上にあるとき, $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AP}$ であるから, $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AP}$ の x 成分に注目すると

$$\overrightarrow{AP} = (s + 4)\overrightarrow{AB}$$

このとき, y 成分および z 成分から

$$\begin{cases} t + 1 = s + 4 \\ -2s + t - 1 = -s - 4 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -s + t = 3 \\ -s + t = -3 \end{cases}$$

これを満たす s, t は存在しないから, 3点 A , B , P は一直線上にない.

- (2) $\overrightarrow{AH} = \frac{(\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB})}{|\overrightarrow{AB}|^2} \overrightarrow{AB}$ であるから $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 3s + 6$, $|\overrightarrow{AB}|^2 = 3$ より

$$\overrightarrow{AH} = (s + 2)\overrightarrow{AB}$$

したがって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + (s + 2)\overrightarrow{AB} \\ &= (-4, -1, 0) + (s + 2)(1, 1, -1) \\ &= (s - 2, s + 1, -s - 2) \end{aligned}$$

よって $\mathbf{H}(s - 2, s + 1, -s - 2)$

- (3) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = (-2s + 2t, s - t - 3, -s + t - 3)$ より, $u = s - t$ とおくと

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = (-2u, u - 3, -u - 3)$$

$\triangle ABP$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2u)^2 + (u - 3)^2 + (-u - 3)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6u^2 + 18} \end{aligned}$$

S は $u = 0$, すなわち, $s = t$ のとき, 最小値 $\frac{1}{2} \sqrt{18} = \frac{3}{2} \sqrt{2}$ をとる. ■

- 5 (1) 开区間 $(1, t)$ において $f(x) - xf'(x) = 0$ であるから

$$\left\{ \frac{f(x)}{x} \right\}' = \frac{f'(x)}{x} - \frac{f(x)}{x^2} = -\frac{f(x) - xf'(x)}{x^2} = 0$$

これを積分すると $\frac{f(x)}{x} = C$ (C は定数)

$f(x)$ は, $x > 0$ で微分可能より, $f(x)$ は $x = 1, x = t$ で連続である.

よって, $\frac{f(x)}{x}$ は閉区間 $[1, t]$ において連続である.

したがって, 閉区間 $[1, t]$ において, $\frac{f(x)}{x}$ は定数である.

- (2) 原点 O と点 $P(t, f(t))$ の距離が $g(t)$ であるから

$$g(t)^2 = t^2 + f(t)^2 \quad \text{ゆえに} \quad g(t)g'(t) = t + f(t)f'(t) \quad (\text{A})$$

$y = f(x)$ ($1 \leq x \leq t$) で表される曲線の長さが $h(t)$ であるから

$$h(t) = \int_1^t \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad \text{ゆえに} \quad h'(t) = \sqrt{1 + f'(t)^2} \quad (\text{B})$$

$g(t) = h(t) + 2$ の両辺を微分すると, (B) の第 2 式から

$$g'(t) = h'(t) = \sqrt{1 + f'(t)^2} \quad (\text{C})$$

(A) の第 2 式を平方すると, (A) の第 1 式および (C) より

$$\{t + f(t)f'(t)\}^2 = g(t)^2 g'(t)^2 = \{t^2 + f(t)^2\} \{1 + f'(t)^2\}^2$$

$\{t + f(t)f'(t)\}^2 = \{t^2 + f(t)^2\} \{1 + f'(t)^2\}^2$ を整理すると

$$t^2 f'(t)^2 - 2t f'(t) f(t) + f(t)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \{t f'(t) - f(t)\}^2 = 0$$

$f(t) - t f'(t) = 0$ であるから, (1) の結果より, 定数 k を用いて

$$\frac{f(t)}{t} = k \quad \text{ゆえに} \quad f(t) = kt$$

$x \geq 0$ で $f(x) \geq 0$ であるから $k \geq 0$

$g(t) = h(t) + 2$ に $t = 1$ を代入すると

$$g(1) = h(1) + 2 = 0 + 2 = 2$$

(A) の第 1 式に $t = 1$ を代入すると, $f(1) = k$ より

$$g(1)^2 = 1^2 + f(1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad 2^2 = 1 + k^2$$

$k > 0$ であるから $k = \sqrt{3}$ よって $f(t) = \sqrt{3}t$ ■