令和６年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
国際人間科学 (環境共生 (理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 c を正の実数とする．各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．a_1 は関数

$$y = x + \sqrt{c - x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq \sqrt{c}\,)$$

が最大値をとるときの x の値とする．a_{n+1} は関数

$$y = x + \sqrt{a_n - x^2} \qquad (0 \leqq x \leqq \sqrt{a_n}\,)$$

が最大値をとるときの x の値とする．数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_2 a_n$ で定める．以下の問に答えよ．

(1) a_1 を c を用いて表せ．

(2) b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を n と c を用いて表せ．

2 a，b，c は実数で，$a \neq 0$ とする．放物線 C と直線 ℓ_1，ℓ_2 をそれぞれ

$$\begin{aligned} &C : y = ax^2 + bx + c \\ &\ell_1 : y = -3x + 3 \\ &\ell_2 : y = x + 3 \end{aligned}$$

で定める．ℓ_1，ℓ_2 がともに C に接するとき，以下の問に答えよ．

(1) b を求めよ．また c を a を用いて表せ．

(2) C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，$\dfrac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) C と ℓ_1 の接点を P，C と ℓ_2 の接点を Q，放物線 C の頂点を R とする．a が (2) の条件を満たしながら動くとき，$\triangle$PQR の重心 G の軌跡を求めよ．

3 n を自然数とする．以下の問に答えよ．

(1) 1 個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n を小さい順に 3 つ求めよ．

(2) 1 個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$ であるような n を小さい順に 3 つ求めよ．

(3) 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の積が 160 の約数となる確率を求めよ．

4 1 辺の長さが $\sqrt{2}$ の正方形 ABCD を底面にもち，高さが 1 である直方体 ABCD-EFGH を，頂点の座標がそれぞれ

$$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 1,\ 0),\ \mathrm{C}(-1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{D}(0,-1,\ 0)$$
$$\mathrm{E}(1,\ 0,\ 1),\ \mathrm{F}(0,\ 1,\ 1),\ \mathrm{G}(-1,\ 0,\ 1),\ \mathrm{H}(0,-1,\ 1)$$

になるように xyz 空間内におく．以下の問に答えよ．

(1) 直方体 ABCD-EFGH を直線 AE のまわりに 1 回転してできる回転体を X_1 とし，また直線 AB のまわりに 1 回転してできる回転体を X_2 とする．X_1 の体積 V_1 と X_2 の体積 V_2 を求めよ．

(2) $0 \leqq t \leqq 1$ とする．平面 $x = t$ と線分 EF の共有点の座標を求めよ．

(3) 直方体 ABCD-EFGH を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を X_3 とする．X_3 の体積 V_3 を求めよ．

5 0 以上の実数 x に対して，

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x} \frac{1}{1+u^2}\,du$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) $0 \leqq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 α に対して，$f(\tan\alpha)$ を求めよ．

(2) xy 平面上で，次の連立不等式の表す領域を図示せよ．

$$0 \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad f(x) + f(y) \leqq f(1)$$

またその領域の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\vec{u}=(1,\ 1)$，$\vec{v}=(x,\ \sqrt{c-x^2})$ とすると，$\vec{u}\cdot\vec{v} \leqq |\vec{u}||\vec{v}|$ であるから

$$x+\sqrt{c-x^2} \leqq \sqrt{2}\sqrt{c}$$

上式において，等号が成立するのは $\vec{u}$ と $\vec{v}$ が同じ向きのときであるから

$$x=\sqrt{c-x^2} \qquad \text{これを解いて} \quad a_1 = x = \sqrt{\boldsymbol{\frac{c}{2}}}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n}{2}} \quad \text{ゆえに} \quad \log a_{n+1} = \frac{1}{2}\log a_n - \frac{1}{2}$$

$b_n = \log a_n$ より $\qquad \boldsymbol{b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{2}}$

(3) $b_1 = \log_2 a_1 = \log_2\sqrt{\dfrac{c}{2}} = \dfrac{1}{2}\log_2 c - \dfrac{1}{2}$

(2) の結果から $\qquad b_{n+1}+1 = \dfrac{1}{2}(b_n+1)$

$\{b_n+1\}$ は初項 $\dfrac{1}{2}(\log_2 c+1)$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n + 1 = \frac{1}{2}(\log_2 c+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって $\qquad \boldsymbol{b_n = (\log_2 c+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$ ■

2 (1) ℓ_1，ℓ_2 がともに C に接するとき

$$\begin{aligned} C' &: y = ax^2 + (b+1)x + c \\ \ell_1' &: y = -2x + 3 \\ \ell_2' &: y = 2x + 3 \end{aligned}$$

とすると，ℓ_1'，ℓ_2' はともに C' に接する．ℓ_1'，ℓ_2' は y 軸対称より，C' も y 軸対称であるから

$$b + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b = -1}$$

C' と ℓ_1' から y を消去して，整理すると

$$ax^2 + 2x + c - 3 = 0 \qquad (*)$$

上の 2 次方程式は重解をもつから，係数について

$$D/4 = 1^2 - a(c-3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{c = \frac{1}{a} + 3}$$

(2) (1) の結果から C の方程式は　$y = ax^2 - x + \dfrac{1}{a} + 3$

C は x 軸と 2 点で交わるから，係数について

$$D = (-1)^2 - 4a\left(\frac{1}{a} + 3\right) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 + 4a < 0$$

上の第 2 式の両辺に $\dfrac{1}{a^2}$ を掛けると

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} + 4\right) < 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-4 < \frac{1}{a} < 0}$$

(3) C' と ℓ_1' の接点を P'，C' と ℓ_2' の接点を Q' とする．

P' の x 座標は，$(*)$ から　$x = -\dfrac{2}{2a} = -\dfrac{1}{a}$

Q' は P' と y 軸対称であるから，その x 座標は　$x = \dfrac{1}{a}$

P と P'，Q と Q' の x 座標は一致するから

$$C : y = ax^2 - x + \frac{1}{a} + 3 = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{3}{4a} + 3$$

これより，3 点 P，Q，R の座標を得る．

$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{a},\ \frac{3}{a} + 3\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{a} + 3\right),\quad \mathrm{R}\left(\frac{1}{2a},\ \frac{3}{4a} + 3\right)$$

したがって，△PQR の重心 G の座標は　$\left(\dfrac{1}{6a},\ \dfrac{19}{12a} + 3\right)$

(2) の結果から　$-\dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{6a} < 0$

$$\frac{19}{12a} + 3 = \frac{19}{2}\cdot\frac{1}{6a} + 3$$

よって，点 G の軌跡は　**直線** $\boldsymbol{y = \dfrac{19}{2}x + 3\ \left(-\dfrac{2}{3} < x < 0\right)}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) サイコロの目 1, 2, 3, 4, 5, 6 の最小公倍数は　60

よって，求める 3 つの数は　**60，120，180**

(2) n の約数となるサイコロの目の集合を A とし，A の大きさ (要素の個数) を $|A|$ とする．$1 \in A$，$2 \notin A \Rightarrow 6 \notin A$，$3 \notin A \Rightarrow 6 \notin A$，$\{2,\ 3\} \subset A \Rightarrow 6 \in A$ に注意すると，$|A| = 5$ となる A は次の 2 通り．

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\} \quad \text{または} \quad A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\}$$

これを満たす n を小さい順に 3 つ求めると　**12，24，30**

(3) $160 = 2^5 \cdot 5$ より　$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$

このとき，5 の目が出るのは 1 回まで，3 回とも 4 の目は出ない．

- 5 の目が出ないときの確率は

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{26}{216}$$

- 5 の目が 1 回出るときの確率は

$${}_3\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{27}{216}$$

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{26}{216} + \frac{27}{216} = \boldsymbol{\frac{53}{216}}$$

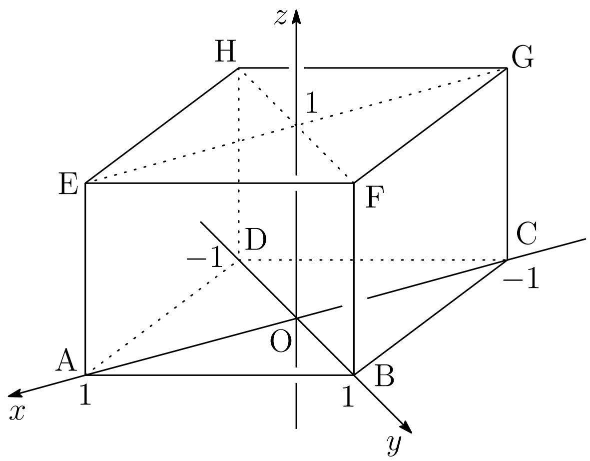
■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 直線 AE のまわりに 1 回転してできる回転体 X_1 の体積 V_1 は

$$V_1 = \pi \mathrm{AC}^2 \cdot \mathrm{AE} = \pi \cdot 2^2 \cdot 1 = \boldsymbol{4\pi}$$

A(1, 0, 0)，B (0, 1, 0)，H(0, −1, 1) より　$\mathrm{AB} = \sqrt{2}$，$\mathrm{AH}^2 = 3$
直線 AB のまわりに 1 回転してできる回転体 X_2 の体積 V_2 は

$$V_2 = \pi \mathrm{AH}^2 \cdot \mathrm{AB} = \pi \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = \boldsymbol{3\sqrt{2}\pi}$$



(2) 直線 EF の方程式は　$x + y = 1,\ z = 1$
これと平面 $x = t$ との共有点の座標は　$(t,\ 1 - t,\ 1)$
$0 \leqq t \leqq 1,\ 0 \leqq 1 - t \leqq 1$ であるから，この共有点は線分 EF 上にある．
よって，平面 $x = t$ と線分 EF との共有点の座標は　$\boldsymbol{(t,\ 1 - t,\ 1)}$

(3) x 軸上の点 $(t,\ 0,\ 0)$ と (2) の共有点 $(t,\ 1 - t,\ 1)$ との距離を d とすると

$$d^2 = (t - 1)^2 + 1$$

したがって，求める回転体 X_3 の体積 V_3 は

$$\frac{V_3}{2\pi} = \int_0^1 d^2\,dt = \int_0^1 \{(t-1)^2 + 1\}\,dt$$
$$= \left[\frac{1}{3}(t-1)^3 + t\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

よって　　$\boldsymbol{V_3 = \frac{8}{3}\pi}$　■

5 (1) $u = \tan\theta$ とすると $\dfrac{du}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

u	$0 \longrightarrow \tan\alpha$
θ	$0 \longrightarrow \alpha$

$$\begin{aligned} f(\tan\alpha) &= \frac{1}{2}\int_{-\tan\alpha}^{\tan\alpha} \frac{1}{1+u^2}\,du = \int_0^{\tan\alpha} \frac{1}{1+u^2}\,du \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\alpha} d\theta = \boldsymbol{\alpha} \end{aligned}$$

(2) $x = \tan\theta_1$，$y = \tan\theta_2$ とすると，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ $\cdots$①

$$0 \leqq \theta_1 \leqq \frac{\pi}{4},\quad 0 \leqq \theta_2 \leqq \frac{\pi}{4}$$

次に，$f(x) + f(y) \leqq f(1)$ を (1) の結論に適用すると

$$\theta_1 + \theta_2 \leqq \frac{\pi}{4} \tag{A}$$

$x = y = 1$，すなわち，$\theta_1 = \theta_2 = \dfrac{\pi}{4}$ とすると，(A) に反するから

$$0 \leqq xy < 1 \quad \cdots ②$$

(A) から $\tan(\theta_1 + \theta_2) \leqq \tan\dfrac{\pi}{4}$

$$\frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1\tan\theta_2} \leqq 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{x+y}{1-xy} \leqq 1$$

①，② に注意して，上の第 2 式を y について解くと

$$0 \leqq y \leqq \frac{-x+1}{x+1} = \frac{2}{x+1} - 1 \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

求める面積は，下の図の斜線部分であるから

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - 1\right) dx = \Big[\,2\log(x+1) - x\,\Big]_0^1 = \mathbf{2\log 2 - 1}$$