令和５年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・国際人間科学 (環境共生 (理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} & (x \leqq 1) \\ 2x - 1 & (x > 1) \end{cases}$$

で定める．a を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) すべての実数 x について $f(x) \geqq x$ が成り立つことを示せ．

(2) $a \leqq 1$ のとき，すべての正の整数 n について $a_n \leqq 1$ が成り立つことを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を n と a を用いて表せ．

2 $a,\ b$ を実数とする．整式 $f(x)$ を $f(x) = x^2 + ax + b$ で定める．以下の問に答えよ．ただし，2 次方程式の重解は 2 つと数える．

(1) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の 2 つの解の実部が共に 0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

(3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の 2 つの解の実部が共に -1 より大きく，0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

3 n を 2 以上の整数とする．袋の中には 1 から $2n$ までの整数が 1 つずつ書いてある $2n$ 枚のカードが入っている．以下の問に答えよ．

(1) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．

(2) この袋から同時に 3 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が偶数である確率を求めよ．

(3) この袋から同時に 2 枚のカードを取り出したとき，そのカードに書かれている数の和が $2n + 1$ 以上である確率を求めよ．

4 四面体OABCがあり，辺OA，OB，OCの長さはそれぞれ$\sqrt{13}$，5，5である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-11$とする．頂点Oから△ABCを含む平面に下ろした垂線とその平面の交点をHとする．以下の問に答えよ．

(1) 線分ABの長さを求めよ．

(2) 実数s，tを$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$をみたすように定めるとき，$s$と$t$の値を求めよ．

(3) 四面体OABCの体積を求めよ．

5 媒介変数表示

$$x=\sin t,\quad y=\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t \qquad (0\leqq t\leqq\pi)$$

で表される曲線をCとする．以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{dx}{dt}=0$または$\dfrac{dy}{dt}=0$となるtの値を求めよ．

(2) Cの概形をxy平面上に描け．

(3) Cの$y\leqq 0$の部分とx軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x \leqq 1$ のとき　$f(x)-x=\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}\right)-x=\dfrac{1}{2}(1-x) \geqq 0$

$x>1$ のとき　$f(x)-x=(2x-1)-x=x-1>0$

よって，すべての実数 x について，次が成立する．

$$f(x)-x \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad f(x) \geqq x$$

(2)

$$(*) \quad a_n \leqq 1$$

［1］$n=1$ のとき，$a_1=a \leqq 1$ より，$(*)$ が成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると　$a_k \leqq 1$

$$a_{k+1}=f(a_k)=\frac{1}{2}a_k+\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}=1$$

したがって，$n=k+1$ のとき，$(*)$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての正の整数 n について，$(*)$ が成立する．

(3) (i) $a \leqq 1$ のとき，(2) の結果から　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}$

$$a_{n+1}-1=\frac{1}{2}(a_n-1) \quad \text{よって} \quad a_n=(a-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+1$$

(ii) $a>1$ のとき，(1) の結果から　$a_{n+1}=f(a_n) \geqq a_n$

$\{a_n\}$ は単調増加列であるから

$$a_n \geqq a > 1 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1}=2a_n-1$$

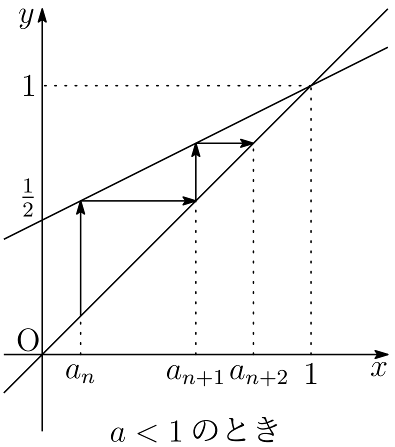
上の第 2 式を変形すると

$$a_{n+1}-1=2(a_n-1) \quad \text{よって} \quad a_n=(a-1)\cdot 2^{n-1}+1$$

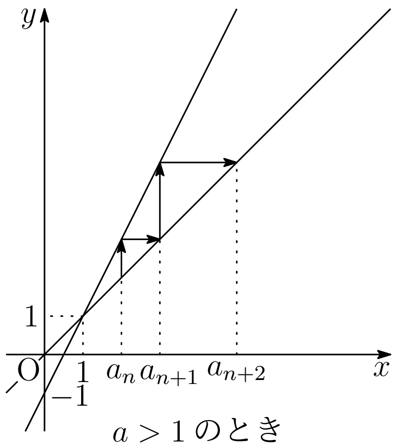
(i)，(ii) から　$\boldsymbol{a_n=\begin{cases}(a-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+1 & (a \leqq 1) \\ (a-1)\cdot 2^{n-1}+1 & (a>1)\end{cases}}$

補足　$f(1)=1$ より，$a=1$ のとき　$a_n=1$

$\{a_n\}$ は $a<1$ のとき，1 に収束し，$a>1$ のとき正の無限大に発散する．



$a<1$ のとき



$a>1$ のとき

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x) = x^2 + ax + b$ より　$f(x) = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + b - \dfrac{a^2}{4}$

$f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき

$$-\frac{a}{2} > 0, \quad f(0) = b > 0, \quad b - \frac{a^2}{4} < 0$$

よって，求める必要十分条件は　$\boldsymbol{a < 0,\ b > 0,\ b < \dfrac{a^2}{4}}$

(2) (i) $f(x) = 0$ が実数解をもつ，すなわち，$a^2 - 4b \geqq 0$ のとき

$$-\frac{a}{2} < 0, \quad f(0) = b > 0$$

したがって　$a > 0,\ \ b > 0,\ \ b \leqq \dfrac{a^2}{4}$

(ii) $f(x) = 0$ が虚数解をもつ，すなわち，$a^2 - 4b < 0$ のとき

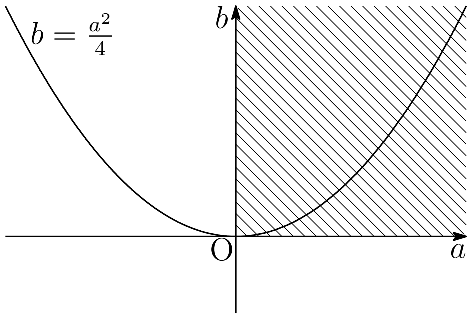
$f(x) = 0$ の虚数解 $\dfrac{-a \pm \sqrt{-a^2 + 4b}\,i}{2}$ の実部 $-\dfrac{a}{2}$ が負であるから

$$-\frac{a}{2} < 0 \quad \text{すなわち} \quad a > 0$$

したがって　$a > 0,\ \ b > \dfrac{a^2}{4}$

(i)，(ii) から　$a > 0,\ \ b > 0$

よって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は，図の斜線部分で境界線を含まない．



(3) (i) $f(x)=0$ が実数解をもつ，すなわち，$a^2-4b \geqq 0$ のとき

$$-1<-\frac{a}{2}<0,\quad f(0)=b>0,\quad f(-1)=1-a+b>0$$

したがって　$0<a<2,\ b>0,\ b>a-1,\ b \leqq \dfrac{a^2}{4}$

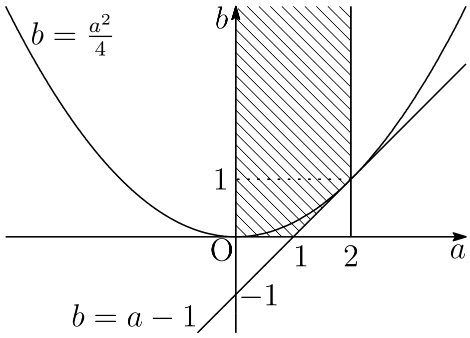
(ii) $f(x)=0$ が虚数解をもつ，すなわち，$a^2-4b<0$ のとき
$f(x)=0$ の虚数解 $\dfrac{-a\pm\sqrt{-a^2+4b}\,i}{2}$ の実部 $-\dfrac{a}{2}$ が -1 より大きく，0 より小さいから

$$-1<-\frac{a}{2}<0 \quad \text{すなわち} \quad 0<a<2$$

したがって　$0<a<2,\ b>\dfrac{a^2}{4}$

(i)，(ii) から　$0<a<2,\ b>0,\ b>a-1$

よって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は，図の斜線部分で境界線を含まない．



■

$\boxed{3}$ (1) $2n$ 枚のカードのうち，偶数のカードおよび奇数のカードはともに n 枚ある．$2n$ 枚のカードから 2 枚取り出すとき，2 枚とも偶数のカードまたは 2 枚とも奇数のカードを取り出す確率であるから

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=\frac{2\cdot{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_2}=2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\Bigg/\frac{2n(2n-1)}{2}=\boldsymbol{\frac{n-1}{2n-1}}$$

(2) (i) $n\geqq 3$ のとき，$2n$ 枚のカードから 3 枚のカードを取り出すとき，偶数のカード 3 枚または偶数のカード 1 枚と奇数のカード 2 枚を取り出す確率であるから

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}+\frac{{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_n\mathrm{C}_2}{{}_{2n}\mathrm{C}_3}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{n-2}{2(2n-1)}+\frac{3}{4(2n-1)}=\frac{1}{2}\qquad(*)$$

(ii) $n=2$ のとき，$2n$ 枚のカードから偶数のカード 1 枚と奇数のカード 2 枚を取り出す確率であるから，$(*)$ に $n=2$ を代入したものである．

(i)，(ii) より，求める確率は $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(3) $2n$ 枚から 2 枚のカードを取り出すとき，1 番目に取り出すカードと 2 番目に取り出すカードの順番を区別すると，取り出す場合の総数は

$${}_{2n}\mathrm{P}_2=2n(2n-1)$$

1 番目に取り出したカードの数を k とする．

(i) $1\leqq k\leqq n$ のとき，2 枚目のカードは，$2n+1-k$ から $2n$ の数が書かれた k 通り．

(ii) $n+1\leqq k\leqq 2n$ のとき，2 枚の目のカードは，k を除く $2n+1-k$ から $2n$ の数が書かれた $k-1$ 通り．

したがって，(i)，(ii) の場合の総数は

$$\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=n+1}^{2n}(k-1)=\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}n\{n+(2n-1)\}=2n^2$$

よって，求める確率は

$$\frac{2n^2}{2n(2n-1)}=\boldsymbol{\frac{n}{2n-1}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと

$$|\vec{a}|=\sqrt{13},\quad |\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=-11$$

したがって
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2&=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2\\&=5^2-2\cdot1+(\sqrt{13})^2=36\end{aligned}$$

よって　$\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\mathbf{6}$

(2) $$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2\\&=-11-1-1+(\sqrt{13})^2=0\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{(\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\qquad(*)$$

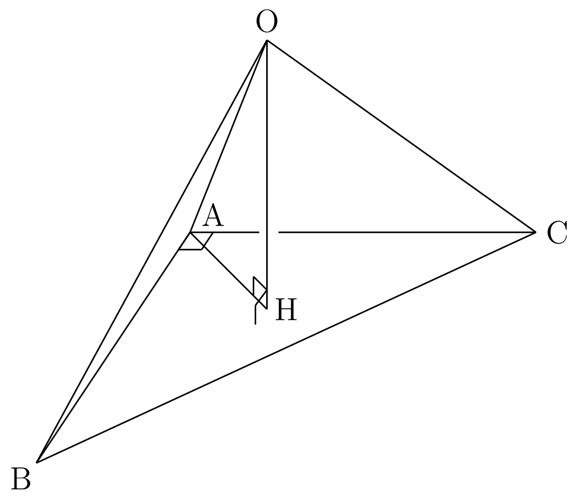
このとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2&=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=5^2-2\cdot1+(\sqrt{13})^2=36\\\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=-\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=-\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=-1+(\sqrt{13})^2=12\\\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=-\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=-1+(\sqrt{13})^2=12\end{aligned}$$

以上の結果を $(*)$ に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{12}{36}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{12}{36}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\qquad(**)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　よって　$\boldsymbol{s=t=\dfrac{1}{3}}$



(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ により，$(**)$ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2=\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+\frac{1}{9}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=\frac{1}{9}\cdot 36+\frac{1}{9}\cdot 36=8$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2=13-8=5$ ゆえに $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\sqrt{5}$

よって，求める四面体 OABC の体積は

$$\frac{1}{6}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 6\cdot\sqrt{5}=\mathbf{6\sqrt{5}}$$

発展 行列 M を $M=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ とすると，四面体 OABC の体積 V は

$$V=\frac{1}{6}|\det M|$$

したがって

$${}^tMM=\begin{pmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & 1 & 1\\ 1 & 25 & -11\\ 1 & -11 & 25\end{pmatrix}$$

$\det M=\det{}^tM$ より，$\det({}^tMM)=\det{}^tM\det M=(\det M)^2$ に注意して

$$(\det M)^2=36^2\cdot 5 \quad ゆえに \quad |\det M|=36\sqrt{5}$$

よって $\qquad V=\dfrac{1}{6}|\det M|=\dfrac{1}{6}\cdot 36\sqrt{5}=\mathbf{6\sqrt{5}}$ ■

5 (1) $x=\sin t,\quad y=\cos\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin t$ より $(0\leqq t\leqq\pi)$

$$\frac{dx}{dt}=\cos t$$
$$\frac{dy}{dt}=-\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t+\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t=\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$$

$\dfrac{dx}{dt}=0$ とすると　$t=\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{dy}{dt}=0$ とすると，$-\dfrac{\pi}{6}\leqq 2t-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{11\pi}{6}$ より

$$2t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\quad すなわち\quad t=\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6}$$

よって，求める t の値は　$\boldsymbol{t=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5\pi}{6}}$

(2) (1) の結果から

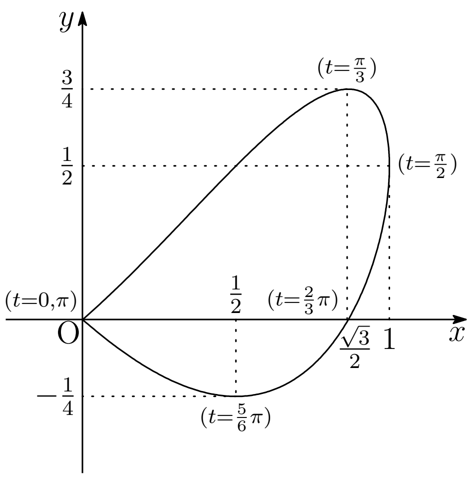
t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	
(x,y)	$(0,0)$		$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{4}\right)$		$\left(1,\frac{1}{2}\right)$		$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$		$(0,0)$

$0<t<\pi$ において，$y=0$ とすると，$\sin t>0$，$-\dfrac{\pi}{6}<t-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$ より

$$t-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\quad ゆえに\quad t=\frac{2\pi}{3}$$

C の原点以外の x 軸との交点は　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$

よって，C の概形は次のようになる [1].



[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2019.pdf $\boxed{5}$

(3) 求める面積を S とし，$f(t)=\sin t$ とおくと　$f'(t)=\cos t$

$$\begin{aligned}
S &= \int_{f(\pi)}^{f(\frac{2\pi}{3})} (-y)\,dx = \int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} (-y)f'(t)\,dt \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t\cos t\,dt \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right)\sin t\cos t\,dt \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin^2 t\cos t\right)dt \\
&= \left[-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos^3 t+\frac{1}{6}\sin^3 t\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}}
\end{aligned}$$

別解　$x=\sin t,\quad y=\cos\left(t-\dfrac{\pi}{6}\right)\sin t$ より

$$\begin{aligned}
x\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}y &= \sin t\left\{-\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t+\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\cos t\right\} \\
&\qquad\qquad -\cos t\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\sin t \\
&= -\sin^2 t\sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right) \\
&= -\sin^2 t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t-\frac{1}{2}\cos t\right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 t\sin t+\frac{1}{2}\sin^2 t\cos t
\end{aligned}$$

ガウス・グリーンの定理により (積分区間は，正の回転角の向きにとる)[2]

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}}\left(x\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}y\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 t\sin t+\frac{1}{2}\sin^2 t\cos t\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos^3 t+\frac{1}{6}\sin^3 t\right]_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{12}}
\end{aligned}$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Odai/Odai_ri_2022.pdf $\boxed{5}$