令和４年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
国際人間科学 (環境共生 (理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}\cdot a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ によって定める．以下の問に答えよ．

(1) すべての自然数 n について $a_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$ が成り立つことを示せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\log a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ によって定める．b_n の値を n を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

2 m を 3 以上の自然数，$\theta=\dfrac{2\pi}{m}$，C_1 を半径 1 の円とする．円 C_1 に内接する (すべての頂点が C_1 上にある) 正 m 角形を P_1 とし，P_1 に内接する (P_1 のすべての辺と接する) 円を C_2 とする．同様に，n を自然数とするとき，円 C_n に内接する正 m 角形を P_n とし，P_n に内接する円を C_{n+1} とする．C_n の半径を r_n，C_n の内側で P_n の外側の部分の面積を s_n とし，$f(m)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ とする．以下の問に答えよ．

(1) r_n，s_n の値を θ，n を用いて表せ．

(2) $f(m)$ の値を θ を用いて表せ．

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} f(m)$ を求めよ．

ただし，必要があれば $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$ を用いてよい．

3 a を実数，$0<a<1$ とし，$f(x)=\log(1+x^2)-ax^2$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) $f(1)=0$ とする．曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

4 a を正の実数とし，双曲線 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ と直線 $y=\sqrt{a}\,x+\sqrt{a}$ が異なる 2 点 P，Q で交わっているとする．線分 PQ の中点を $\mathrm{R}(s,\ t)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $s,\ t$ の値を a を用いて表せ．

(3) a が (1) で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) t の値を s を用いて表せ．

5 $a,\ b$ を実数，p を素数とし，$1<a<b$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $x,\ y,\ z$ を 0 でない実数とする．$a^x=b^y=(ab)^z$ ならば $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ であることを示せ．

(2) $m,\ n$ を $m>n$ をみたす自然数とし，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{p}$ とする．$m,\ n$ の値を p を用いて表せ．

(3) $m,\ n$ を自然数とし，$a^m=b^n=(ab)^p$ とする．b の値を $a,\ p$ を用いて表せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $(*)$ $a_{n+2}=\sqrt{a_{n+1}\cdot a_n}$ より

$$a_{n+2}\sqrt{a_{n+1}}=a_{n+1}\sqrt{a_n}\quad ゆえに\quad a_{n+1}\sqrt{a_n}=a_2\sqrt{a_1}$$

$a_1=1$, $a_2=2$ より　$a_{n+1}\sqrt{a_n}=2\sqrt{1}$　よって　$a_{n+1}=\dfrac{2}{\sqrt{a_n}}$

(2) $(*)$ の両辺の自然対数をとると

$$\log a_{n+2}=\frac{1}{2}\log a_{n+1}+\frac{1}{2}\log a_n$$

$b_n=\log a_n$ より　$b_1=1$，$b_2=\log 2$，$b_{n+2}=\dfrac{1}{2}b_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_n$

$$b_{n+2}+\frac{1}{2}b_{n+1}=b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n,$$
$$b_{n+2}-b_{n+1}=-\frac{1}{2}(b_{n+1}-b_n)$$

したがって

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n=b_2+\frac{1}{2}b_1=\log 2,$$
$$b_{n+1}-b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b_2-b_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\log 2$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$\frac{3}{2}b_n=\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\log 2$$

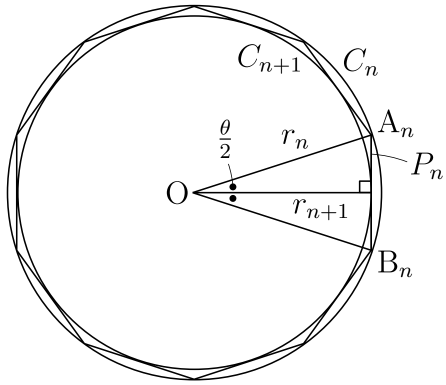
よって　$\boldsymbol{b_n=\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\log 2}$

(3) (2) の結果から

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{2}{3}\log 2=\log 2^{\frac{2}{3}}\quad ゆえに\quad \lim_{n\to\infty}\log a_n=\log 2^{\frac{2}{3}}$$

よって　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=2^{\frac{2}{3}}}$　■

2 (1) P_n の 1 辺を $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ とすると



$$r_1 = 1, \quad r_{n+1} = r_n \cos\frac{\theta}{2}$$

したがって

$$r_n = 1\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{n-1} = \boldsymbol{\cos^{n-1}\frac{\theta}{2}},$$

$$\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n = \frac{1}{2}{r_n}^2\sin\theta$$

$\theta = \dfrac{2\pi}{m}$ より，$m = \dfrac{2\pi}{\theta}$ であるから

$$\begin{aligned} s_n &= \pi {r_n}^2 - m\triangle \mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n = \pi{r_n}^2 - \frac{2\pi}{\theta}\cdot\frac{1}{2}{r_n}^2\sin\theta \\ &= \pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right){r_n}^2 = \boldsymbol{\pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cos^{2n-2}\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果より

$$\begin{aligned} f(m) &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n = \pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\cos^{2n-2}\frac{\theta}{2} \\ &= \pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\cdot\frac{1}{1-\cos^2\frac{\theta}{2}} = \pi\left(1 - \frac{\sin\theta}{\theta}\right)\frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} \\ &= 4\pi\cdot\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

$\theta = \dfrac{2\pi}{m}$ より，$m \to \infty$ のとき $\theta \to 0$ であるから

$$\lim_{m\to\infty} f(m) = \lim_{\theta\to 0} 4\pi\cdot\frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2 = 4\pi\cdot\frac{1}{6}\cdot 1^2 = \boldsymbol{\frac{2\pi}{3}}$$

■

3 (1) $f(x) = \log(1+x^2) - ax^2$ より $(0 < a < 1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 2ax = \frac{2x(1-a-ax^2)}{1+x^2}$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 0,\ \pm\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{1-a}{a}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{1-a}{a}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

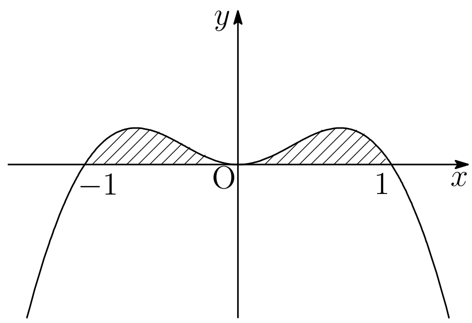
よって　極大値 $f\left(\pm\sqrt{\dfrac{1-a}{a}}\right) = \boldsymbol{a - 1 - \log a}$，極小値 $f(0) = \boldsymbol{0}$

(2) $f(0) = 0$，$f(1) = 0$．$y = f(x)$ のグラフは x 軸に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}\frac{S}{2} &= \int_0^1 f(x)\,dx = \Big[\,xf(x)\,\Big]_0^1 - \int_0^1 xf'(x)\,dx \\ &= -\int_0^1 x\left(\frac{2x}{1+x^2} - 2ax\right)dx \\ &= \int_0^1 (2ax^2 - 2)\,dx + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad (*)\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\int_0^1 (2ax^2 - 2)\,dx &= \left[\,\frac{2}{3}ax^3 - 2x\,\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}a - 2\end{aligned}$$



$x = \tan\theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

これらを $(*)$ に代入すると　$\dfrac{S}{2} = \dfrac{2}{3}a - 2 + \dfrac{\pi}{2}$

$f(1) = \log 2 - a = 0$ より　$a = \log 2$　よって　$\boldsymbol{S = \dfrac{4}{3}\log 2 - 4 + \pi}$ ■

$\boxed{4}$ (1) 双曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ と直線 $\ell : y = \sqrt{a}\,x + \sqrt{a}$ の方程式から y を消去して整理すると

$$(a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0 \qquad (*)$$

C と ℓ が異なる 2 点で交わるとき，上の方程式の係数について

$$a - 1 \neq 0 \quad かつ \quad D = a^2 - (a-1)(a+3) = 4 - 3a > 0$$

$a > 0$ であるから　　$\boldsymbol{0 < a < 1,\ 1 < a < \dfrac{4}{3}}$

(2) $(*)$ の 2 つの解を $s_1,\ s_2$ とすると，解と係数の関係により

$$s_1 + s_2 = -\frac{2a}{a-1} \quad ゆえに \quad s = \frac{s_1 + s_2}{2} = \boldsymbol{\frac{a}{1-a}}$$

これを $\ell : y = \sqrt{a}(x+1)$ の方程式に代入すると

$$t = \sqrt{a}\left(\frac{a}{1-a} + 1\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{a}}{1-a}}$$

(3) (2) の結果から　$s = -\dfrac{1}{a-1} - 1$

$f(a) = -\dfrac{1}{a-1} - 1$ とおくと，$f(a)$ は $a < 1,\ 1 < a$ で単調増加．

$$f(0) = 0, \quad \lim_{a \to 1-0} f(a) = \infty, \quad \lim_{a \to 1+0} f(a) = -\infty, \quad f\left(\frac{4}{3}\right) = -4$$

よって，$0 < a < 1,\ 1 < a < \dfrac{4}{3}$ において　$\boldsymbol{s < -4,\ 0 < s}$

(4) $s = \dfrac{a}{1-a}$ より　$(s+1)a = s$　$s \neq -1$ であるから　$a = \dfrac{s}{s+1}$

(2) の結果から　　$t = \dfrac{\sqrt{\dfrac{s}{s+1}}}{1 - \dfrac{s}{s+1}} = \boldsymbol{(s+1)\sqrt{\dfrac{s}{s+1}}}$

補足 次のように表記することもできる．

$$t = \begin{cases} \sqrt{s(s+1)} & (0 < s) \\ -\sqrt{s(s+1)} & (s < -4) \end{cases}$$

■

5 (1) $R = a^x = b^y = (ab)^z$ とおくと $(x,\ y,\ z \neq 0,\ 1 < a < b)$ $R \neq 1$

$$a = R^{\frac{1}{x}},\quad b = R^{\frac{1}{y}},\quad ab = R^{\frac{1}{z}}$$

ゆえに $R^{\frac{1}{x}}R^{\frac{1}{y}} = R^{\frac{1}{z}}$ したがって $R^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = R^{\frac{1}{z}}$ よって $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$

別解 $R = a^x = b^y = (ab)^z$ とおくと $(x,\ y,\ z \neq 0,\ 1 < a < b)$ $R \neq 1$
正の実数 c $(c \neq 1)$ を底とする対数をとると

$$\log_c R = x\log_c a = y\log_c b = z(\log_c a + \log_c b)$$

したがって $\log_c a = \dfrac{\log_c R}{x}$, $\log_c b = \dfrac{\log_c R}{y}$, $\log_c a + \log_c b = \dfrac{\log_c R}{z}$

上の第 1 式，第 2 式を第 3 式に代入すると

$$\frac{\log_c R}{x} + \frac{\log_c R}{y} = \frac{\log_c R}{z} \quad \text{よって} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

(2) $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p}$ より $mn = (m+n)p$ ゆえに $(m-p)(n-p) = p^2$
$m > n$ に注意すると，$m - p > n - p > 0$ であるから

$$m - p = p^2,\ \ n - p = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{(m,\ n) = (p^2 + p,\ p + 1)}$$

別解 $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{p}$ より $mn = (m+n)p$ $\cdots$①
p は素数であるから，m または n は p を因数にもつ．m が p を因数にもつ，すなわち，$m = kp$ (k は整数) とし，① に代入すると

$$kpn = (kp+n)p \quad \text{ゆえに} \quad n = \frac{kp}{k-1}$$

上の第 2 式の右辺は整数で k と $k-1$ は互いに素であるから，$k - 1 = 1,\ p$ である．このとき，$(m,\ n) = (2p,\ 2p),\ (p(p+1),\ p+1)$
また，$m,\ n$ の対称性から

$$(m,\ n) = (2p,\ 2p),\ (p(p+1),\ p+1),\ (p+1,\ p(p+1))$$

$m > n$ であるから $\boldsymbol{m = p(p+1),\ \ n = p + 1}$

(3) $m,\ n$ は自然数であるから，$Q=a^m=b^n$ とおくと $(1<a<b)$ $\quad Q>1$

$$a=Q^{\frac{1}{m}},\quad b=Q^{\frac{1}{n}}$$

$a<b$ より $\quad Q^{\frac{1}{m}}<Q^{\frac{1}{n}}$ $\quad$ ゆえに $\quad \dfrac{1}{m}<\dfrac{1}{n}$ $\quad$ すなわち $\quad m>n$

さらに，(1)，(2) の結論を適用すると

$$a^{p(p+1)}=b^{p+1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b=a^p}$$ ■