令和３年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
国際人間科学 (環境共生 (理科系))・海事科学

1 i を虚数単位とする．以下の問に答えよ．

(1) $n=2,3,4,5$ のとき $(2+i)^n$ を求めよ．またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ．

(2) n を正の整数とするとき $(2+i)^n$ は虚数であることを示せ．

2 次の定積分を求めよ．

(1) $I=\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

(2) $J=\displaystyle\int_0^1 x^3\log(x^2+1)\,dx$

3 $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が垂直であるとする．$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+3\vec{b}$ のなす角を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $|\vec{a}|=x$，$|\vec{b}|=y$ とするとき，$\sin^2\theta$ を x，y を用いて表せ．

(2) θ の最大値を求めよ．

4 m を実数とする．座標平面上の放物線 $y=x^2$ と直線 $y=mx+1$ の共有点を A，B とし，原点を O とする．以下の問に答えよ．

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ．

(2) 3 点 A，B，O を通る円の方程式を求めよ．

(3) 放物線 $y=x^2$ と (2) の円が A，B，O 以外の共有点をもたないような m の値をすべて求めよ．

5 座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における座標が

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\quad y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t}$$

であるとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 P と原点 O との距離を求めよ．

(2) 点 P の時刻 t における速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{5+4\cos t}$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)

$$(2+i)^2 = 4+4i+i^2 = \mathbf{3+4}\boldsymbol{i}$$

$$\begin{aligned}(2+i)^3 &= (2+i)(2+i)^2 = (2+i)(3+4i)\\ &= 6+11i+4i^2 = \mathbf{2+11}\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2+i)^4 &= (2+i)(2+i)^3 = (2+i)(2+11i)\\ &= 4+24i+11i^2 = \mathbf{-7+24}\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2+i)^5 &= (2+i)(2+i)^4 = (2+i)(-7+24i)\\ &= -14+41i+24i^2 = \mathbf{-38+41}\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

よって，$n=2,3,4,5$ のとき，$(2+i)^n$ の虚部を 10 で割った余りは，順次

$$\mathbf{4,\quad 1,\quad 4,\quad 1}$$

(2) 自然数 n について，$(2+i)^n = a_n + b_n i$ とすると

$$\begin{aligned}a_{n+1}+b_{n+1}i &= (2+i)(a_n+b_n i)\\ &= 2a_n - b_n + (a_n+2b_n)i\end{aligned}$$

したがって　$a_{n+1} = 2a_n - b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n$

(1) の結果から

$$(*)\begin{cases} n\text{ が奇数のとき} & a_n \equiv 2, \quad b_n \equiv 1 \pmod{10}\\ n\text{ が偶数のとき} & a_n \equiv 3, \quad b_n \equiv 4 \pmod{10}\end{cases}$$

であると推測する．

［1］n が奇数のとき

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2a_n - b_n \equiv 2\cdot2-1 \equiv 3 \pmod{10}\\ b_{n+1} &= a_n + 2b_n \equiv 2+2\cdot1 \equiv 4 \pmod{10}\end{aligned}$$

［2］n が偶数のとき

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2a_n - b_n \equiv 2\cdot3-4 \equiv 2 \pmod{10}\\ b_{n+1} &= a_n + 2b_n \equiv 3+2\cdot4 \equiv 1 \pmod{10}\end{aligned}$$

(1),［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

すべての自然数 n について，$b_n \neq 0$ であるから，$(2+i)^n$ は虚数である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $x=\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

このとき，$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin\theta\cos\theta)^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\,d\theta \\
&= \frac{1}{8}\Big[\,\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{16}}
\end{aligned}$$

発展 $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}!=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ を利用[1]．$t=x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2x$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$0 \longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x^2(1-x^2)}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)!}(1-0)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{\pi}{16}}
\end{aligned}$$

(2) $t=x^2+1$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2x$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow 2$

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 x^3\log(x^2+1)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2\log(x^2+1)\cdot 2x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 (t-1)\log t\,dt = \frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{t^2}{2}-t\right)'\log t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\,\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\log t\,\Big]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{t^2}{2}-t\right)\frac{1}{t}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\,\frac{t^2}{4}-t\,\Big]_1^2 = \boldsymbol{\frac{1}{8}}
\end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{4}\int_0^1 (x^4-1)'\log(x^2+1)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\Big[\,(x^4-1)\log(x^2+1)\,\Big]_0^1 - \frac{1}{4}\int_0^1 (x^4-1)\frac{2x}{x^2+1}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-1)x\,dx = -\frac{1}{2}\Big[\,\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\,\Big]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{8}}
\end{aligned}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2020.pdf (p.8 を参照)

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+3\vec{b}$ のなす角が θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ であるから

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b}) = |\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}+3\vec{b}|\cos\theta$$

このとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$ が垂直であるから

$$|\vec{a}|^2+3|\vec{b}|^2 = \sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}\sqrt{|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2}\cos\theta \qquad (*)$$

$|\vec{a}|=x$, $|\vec{b}|=y$ とおいて，両辺を平方すると

$$(x^2+3y^2)^2 = (x^2+y^2)(x^2+9y^2)(1-\sin^2\theta)$$

したがって

$$(x^2+y^2)(x^2+9y^2)\sin^2\theta = (x^2+y^2)(x^2+9y^2)-(x^2+3y^2)^2$$

よって　$\boldsymbol{\sin^2\theta = \dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}}$

別解 2 つの $\vec{a}$, $\vec{b}$ を座標平面上のベクトルとし，$\vec{a}=(x,\ 0)$, $\vec{b}=(0,\ y)$ とする．原点を O とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{a}+\vec{b} = (x,\ y), \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{a}+3\vec{b} = (x,\ 3y)$$

とする．△OPQ の面積に注目すると $(x>0,\ y>0)$

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\sin\theta = \frac{1}{2}|x\cdot 3y - y\cdot x|$$

したがって　$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+9y^2}\sin\theta = 2xy$

よって　$\boldsymbol{\sin^2\theta = \dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)(x^2+9y^2)}}$

(2) (1) の結果から

$$\sin^2\theta = \frac{4x^2y^2}{x^4+10x^2y^2+9y^4} = \frac{4}{\dfrac{x^2}{y^2}+10+\dfrac{9y^2}{x^2}}$$

相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{x^2}{y^2}+10+\frac{9y^2}{x^2} \geqq 10+2\sqrt{\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{9y^2}{x^2}} \geqq 16$$

したがって　$\sin^2\theta \leqq \dfrac{4}{16} \leqq \dfrac{1}{4}$　ゆえに　$\sin\theta \leqq \dfrac{1}{2}$

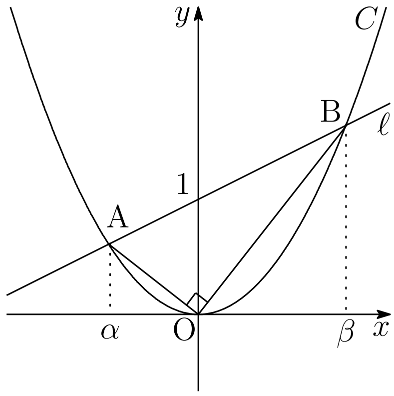
$(*)$ より　$\cos\theta > 0$　すなわち　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$

よって，θ の最大値は　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 放物線 $C: y=x^2$ と直線 $\ell: y=mx+1$ の方程式から y を消去すると

$$x^2-mx-1=0 \qquad (*)$$

曲線 C と直線 ℓ の共有点 A，B の x 座標をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると，方程式 $(*)$ の解と係数の関係により



$$\alpha+\beta=m,\quad \alpha\beta=-1 \qquad (**)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(\alpha,\ \alpha^2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\beta,\ \beta^2)$ について，$(**)$ により

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\alpha\beta+\alpha^2\beta^2=\alpha\beta(1+\alpha\beta)=0$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　よって　$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{2}$

(2) 3 点 A，B，O を通る円は AB を直径の両端とする円であるから，この円周上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ より

$$(x-\alpha)(x-\beta)+(y-\alpha^2)(y-\beta^2)=0$$

したがって　$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+y^2-(\alpha^2+\beta^2)y+(\alpha\beta)^2=0$

$(**)$ および $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=m^2+2$ より，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{x^2-mx+y^2-(m^2+2)y=0}$$

(3) (2) で求めた円と放物線 C の方程式から y を消去すると

$$x^2-mx+(x^2)^2-(m^2+2)x^2=0$$

整理すると　$x^4-(m^2+1)x^2-mx=0$

3 点 A，B，O の x 座標 $\alpha,\ \beta,\ 0$ はこの方程式の解で，左辺は $x-\alpha,\ x-\beta,\ x$ を因数に持つ，すなわち，$x^2-mx-1,\ x$ を因数に持つことに注意して

$$x(x+m)(x^2-mx-1)=0$$

これから，C と円の共有点の x 座標は，$0, -m,\ \alpha,\ \beta$ である．

C と円が A, B, O 以外の共有点を持たないとき，$-m$ は方程式

$$x(x^2-mx-1)=0$$

の解であるから

$$m(2m^2-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{m=0,\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標が

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\quad y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t} \tag{$*$}$$

であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2&=\left(\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t}\right)^2+\left(\frac{3\sin t}{5+4\cos t}\right)^2\\&=\frac{16+40\cos t+25\cos^2 t+9\sin^2 t}{(5+4\cos t)^2}\\&=\frac{25+40\cos t+16\cos^2 t}{(5+4\cos t)^2}=1\end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{OP=1}$

(2) $(*)$ より

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{-5\sin t(5+4\cos t)-(4+5\cos t)(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2}\\&=-\frac{9\sin t}{(5+4\cos t)^2},\\\frac{dy}{dt}&=\frac{3\cos t(5+4\cos t)-3\sin t(-4\sin t)}{(5+4\cos t)^2}\\&=\frac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\vec{v}=\left(-\frac{9\sin t}{(5+4\cos t)^2},\ \frac{3(4+5\cos t)}{(5+4\cos t)^2}\right)}$

P を原点を中心に $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転させた点を $\mathrm{Q}(-y,\ x)$ とすると

$$\vec{v}=\frac{3}{5+4\cos t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\qquad |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$$

よって　$|\vec{v}|=\left|\dfrac{3}{5+4\cos t}\right||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\boldsymbol{\dfrac{3}{5+4\cos t}}$

補足 $\mathrm{OP}^2=1$ より，$x^2+y^2=1$ の両辺を t で微分すると

$$2\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)=0\quad ゆえに\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=0\quad すなわち\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\vec{v}$$

(3) $(*)$ より　$t=0$ のとき　$\mathrm{P}(1,\ 0)$，　$t=\pi$ のとき　$\mathrm{P}(-1,\ 0)$

$$0 \leqq t \leqq \pi \text{ において} \quad y \geqq 0$$

(2) の結果から　$0<t<\pi$ において　$\dfrac{dx}{dt}<0$

よって，点 P は $0 \leqq t \leqq \pi$ において，単位円周上を点 $(1,\ 0)$ から点 $(-1,\ 0)$ まで反時計回りに移動する．したがって，点 P の描く弧長 s は

$$s=\int_0^{\pi}|\vec{v}|\,dt=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 1=\pi$$

上式に (2) の結果を代入すると

$$\int_0^{\pi}\frac{3}{5+4\cos t}\,dt=\pi \quad \text{よって} \quad \int_0^{\pi}\frac{dt}{5+4\cos t}\,dt=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

補足 P が単位円周上を移動することは変数変換を行うことで確認できる．まず

$$f(u)=\frac{1-9u^2}{1+9u^2},\quad g(u)=\frac{6u}{1+9u^2}\quad (0 \leqq u<\infty)$$

とおくと

$$f(u)^2+g(u)^2=1,\quad f'(u)=-\frac{36u}{(1+9u^2)^2}$$

$f(u)$ は単調減少で，点 $(f(u),\ g(u))$ は，$u=0$ のとき $(1,\ 0)$，$u\to\infty$ のとき $(-1,\ 0)$ にある．さらに

$$u=\tan\theta \quad \left(0 \leqq \theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とする ($\theta\to\frac{\pi}{2}-0$ のとき $u\to\infty$)．$\cos t=f(u)$，$\sin t=g(u)$ とおくと

$$\begin{aligned}
x&=\frac{4+5f(u)}{5+4f(u)}=\frac{4(1+9u^2)+5(1-9u^2)}{5(1+9u^2)+4(1-9u^2)}\\
&=\frac{1-u^2}{1+u^2}=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\cos 2\theta,\\
y&=\frac{3g(u)}{5+4f(u)}=\frac{3\cdot 6u}{5(1+9u^2)+4(1-9u^2)}\\
&=\frac{2u}{1+u^2}=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\sin 2\theta
\end{aligned}$$

$0 \leqq 2\theta<\pi$ であることから，P の軌跡が分かる．

本題の定積分を $\cos t = f(u)$ および $u = \tan\theta$ を用いて求めることもできる．$\cos t = f(u)$ の両辺を u について微分すると

$$-\sin t\frac{dt}{du} = f'(u) \quad ゆえに \quad \frac{dt}{du} = -\frac{f'(u)}{g(u)}$$

t	$0 \longrightarrow \pi$
u	$0 \longrightarrow \infty$

したがって

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{dt}{5+4\cos t} &= \int_0^\infty \frac{1}{5+4f(u)}\cdot\frac{-f'(u)}{g(u)}\,du \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{5(1+9u^2)+4(1-9u^2)}\cdot\frac{36u}{6u}\,du \\ &= \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}\end{aligned}$$

さらに，$u = \tan\theta$ を θ について微分すると

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1+u^2$$

u	$0 \longrightarrow \infty$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

よって $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{5+4\cos t} = \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{3}$