令和２年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
国際人間科学 (環境共生 (理科系))・海事科学

1 α は実数とし，$f(x)$ は係数が実数である 3 次式で，次の条件 (i)，(ii) をみたすとする．

(i) $f(x)$ の x^3 の係数は 1 である．

(ii) $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ について，

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$$

が成り立つ．

以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れることを示せ．

(2) $f(\alpha+2) = 0$ とする．$f'(x) = 0$ かつ $x \neq \alpha$ をみたす x を α を用いて表せ．

(3) (2) の条件のもとで $\alpha = 0$ とする．xy 平面において不等式

$$y \geqq f(x) \quad \text{かつ} \quad y \geqq f'(x) \quad \text{かつ} \quad y \leqq 0$$

の表す部分の面積を求めよ．

2 θ を $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ をみたす実数とし，原点 O，A(1, 0)，B($\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$) を頂点とする $\triangle$OAB の内接円の中心を P とする．また，θ がこの範囲を動くときに点 P が描く曲線と線分 OA によって囲まれた部分を D とする．以下の問に答えよ．

(1) 点 P の座標は $\left(1-\sin\theta,\ \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$ で表されることを示せ．

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n を自然数とし，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ に対して $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ が最大となる x の値がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) (1) の x の値を x_n とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\tan x_n}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ p を 2 以上の自然数とし，数列 $\{x_n\}$ は

$$x_1 = \frac{1}{2^p+1}, \quad x_{n+1} = |2x_n - 1| \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) $p = 3$ のとき，x_n を求めよ．

(2) $x_{p+1} = x_1$ であることを示せ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 条件 (i) から

$$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)+px+q$$

とおいて，これを微分すると

$$f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)^2+p$$

条件 (ii) から

$$f(\alpha)=p\alpha+q=0,\quad f'(\alpha)=p=0 \quad \text{ゆえに} \quad p=q=0$$

したがって　$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta) \quad \cdots ①$

よって，$f(x)$ は $(x-\alpha)^2$ で割り切れる．

(2) $f(\alpha+2)=0$ および ① より，$\beta=\alpha+2$ であるから

$$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\alpha-2) \tag{A}$$

これを微分すると

$$\begin{aligned} f'(x)&=2(x-\alpha)(x-\alpha-2)+(x-\alpha)^2\\ &=(x-\alpha)\{2(x-\alpha-2)+(x-\alpha)\}\\ &=(x-\alpha)(3x-3\alpha-4) \end{aligned} \tag{B}$$

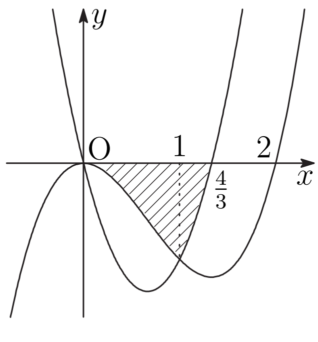
したがって，$f'(x)=0$ かつ $x\neq\alpha$ をみたす x は

$$3x-3\alpha-4=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x=\alpha+\frac{4}{3}}$$

(3) (A)，(B) に $\alpha=0$ を代入すると

$$f(x)=x^2(x-2),\quad f'(x)=x(3x-4)$$

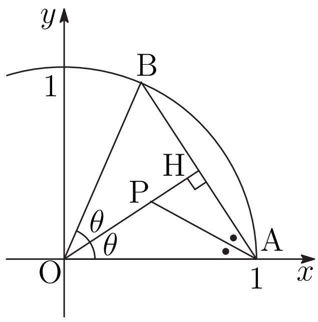
$y\geqq f(x)$，$y\geqq f'(x)$，$y\leqq 0$ の表す領域は，右の図の斜線部分でその面積を S とすると



$$\begin{aligned} S&=\int_0^1\{-f(x)\}\,dx+\int_1^{\frac{4}{3}}\{-f'(x)\}\,dx\\ &=\int_0^1(-x^3+2x^2)\,dx+\int_1^{\frac{4}{3}}(-3x^2+4x)\,dx\\ &=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3\right]_0^1+\Bigl[-x^3+2x^2\Bigr]_1^{\frac{4}{3}}=\boldsymbol{\frac{65}{108}} \end{aligned}$$

2 (1) A(1, 0)，B$(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$

直線OPと辺ABの交点をHとすると，HはABの中点であるから



$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2},\ \frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$
$$= \left(\cos^2\theta,\ \sin\theta\cos\theta\right)$$

OH⊥AHであるから　$\mathrm{AH} = \sin\theta$

APは∠OAHの二等分線であるから

$$\mathrm{OP} : \mathrm{PH} = \mathrm{OA} : \mathrm{AH} = 1 : \sin\theta$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OP}+\mathrm{PH}}\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{1}{1+\sin\theta}(\cos^2\theta,\ \sin\theta\cos\theta)$

$$= \left(1-\sin\theta,\ \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

よって，点Pの座標は　$\left(1-\sin\theta,\ \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$

別解 点Pのy座標は△OABの内接円の半径に等しいから

$$\frac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{AB})y = \frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin 2\theta$$
$$\frac{1}{2}(1+1+2\sin\theta)y = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin 2\theta$$

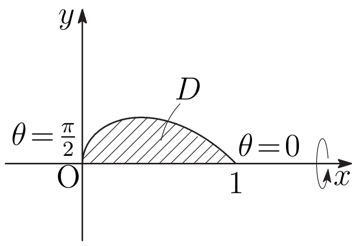
ゆえに　$(1+\sin\theta)y = \sin\theta\cos\theta$　　これから　$y = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$

また，$\dfrac{y}{x} = \tan\theta$であるから

$$x = \frac{y}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\sin\theta)\tan\theta} = \frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta} = 1-\sin\theta$$

(2) (1) の結果から

$$x = 1 - \sin\theta, \quad y = \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}$$



ゆえに $\dfrac{dx}{d\theta} = -\cos\theta$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

D を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 y^2\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)^2(-\cos\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos^3\theta}{(1+\sin\theta)^2}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\{(1+\sin\theta)(-\sin^2\theta+2\sin\theta-2)+2\}}{1+\sin\theta}\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{(-\sin^2\theta+2\sin\theta-2)\cos\theta + \frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}\right\}d\theta \\
&= \left[-\frac{1}{3}\sin^3\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta + 2\log(1+\sin\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2\log 2 - \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

よって $V = \boldsymbol{\pi\left(2\log 2 - \frac{4}{3}\right)}$

別解 $x = 1 - \sin\theta$ より，$\sin\theta = 1 - x$ であるから

$$\begin{aligned}
y^2 &= \frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2} = \frac{\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}{(1+\sin\theta)^2} \\
&= \frac{(1-x)^2\{1-(1-x)^2\}}{(1+1-x)^2} = \frac{(1-x)^2x(2-x)}{(2-x)^2} \\
&= \frac{(1-x)^2x}{2-x} = \frac{(2-x)(-x^2-1)+2}{2-x} \\
&= -x^2 - 1 + \frac{2}{2-x}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^1 y^2\,dx = \int_0^1 \left(-x^2-1+\frac{2}{2-x}\right)dx \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} - x - 2\log(2-x)\right]_0^1 = 2\log 2 - \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 30 個の○を一列に並べ，その間の 29 か所から 1 か所に仕切りを作る場合の総数に等しいから

$$ {}_{29}\mathrm{C}_1 = \mathbf{29} \text{ (個)} $$

(2) 30 個の○を一列に並べ，その間の 29 か所から 2 か所に仕切りを作る場合の総数に等しいから

$$ {}_{29}\mathrm{C}_2 = \frac{29\cdot 28}{2\cdot 1} = \mathbf{406} \text{ (個)} $$

(3) 和 30 になる 3 つの自然数の組合せについて

(i) 3 数が等しいものが $\{10,\ 10,\ 10\}$ の 1 組

(ii) 2 数だけが等しいものが，次の 13 組

$$ \{1,1,28\},\ \{2,2,26\},\ \cdots,\ \{9,9,12\},\ \{11,11,8\},\ \cdots\{14,14,2\} $$

(iii) 3 数がすべて異なるものが，n 組とすると，(i)，(ii) および (2) から

$$ 1+13\cdot 3+n\cdot 3! = 406 \quad \text{これを解いて} \quad n = 61 \text{ (組)} $$

よって，求める組合せの総数は，(i)〜(iii) から

$$ 1+13+61 = \mathbf{75} \text{ (組)} $$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ を微分すると $(2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi)$

$$ f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} $$

$g(x) = x\cos x - \sin x$ とおくと，$2n\pi \leqq x \leqq (2n+1)\pi$ において

$$ g'(x) = -x\sin x < 0 $$

$g(x)$ は単調減少，$g(2n\pi) = 2n\pi$，$g((2n+1)\pi) = -(2n+1)\pi$ であるから

$$ g(c) = 0, \quad 2n\pi < c < (2n+1)\pi $$

を満たす c がただ一つ存在する．したがって

x	$2n\pi$	$\cdots$	c	$\cdots$	$(2n+1)\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

よって，$f(x)$ が最大となる x の値がただ 1 つ存在する．

(2) $g\left(\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)=-1$ であるから，c，すなわち，x_n は

$$f'(x_n)=0, \quad 2n\pi<x_n<\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

上の第 1 式から

$$\frac{x_n\cos x_n-\sin x_n}{{x_n}^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad x_n\cos x_n=\sin x_n$$

さらに第 2 式から，$\cos x_n\neq 0$ であることに注意して

$$x_n=\frac{\sin x_n}{\cos x_n}=\tan x_n \quad \text{ゆえに} \quad 2n\pi<\tan x_n<\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

したがって　$\dfrac{1}{\left(2+\frac{1}{2n}\right)\pi}<\dfrac{n}{\tan x_n}<\dfrac{1}{2\pi}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{1}{2n}\right)\pi}=\frac{1}{2\pi}$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\tan x_n}=\boldsymbol{\frac{1}{2\pi}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $p=3$ のとき，$x_1=\dfrac{1}{2^3+1}=\dfrac{1}{9}$ より

$$x_2=\left|2\cdot\frac{1}{9}-1\right|=\frac{7}{9}, \quad x_3=\left|2\cdot\frac{7}{9}-1\right|=\frac{5}{9}, \quad x_4=\left|2\cdot\frac{5}{9}-1\right|=\frac{1}{9}$$

$x_4=x_1$ であるから

$$\boldsymbol{x_n=\begin{cases}\dfrac{1}{9} & (n\equiv 1)\\[2mm] \dfrac{7}{9} & (n\equiv 2)\\[2mm] \dfrac{5}{9} & (n\equiv 0)\end{cases} \quad (\mathrm{mod}\ 3)}$$

(2) $2 \leqq q \leqq p$ のとき

$$x_q = \frac{2^p - (2^{q-1} - 1)}{2^p + 1} \quad \cdots (*)$$

が成立することを数学的帰納法により示す.

［1］ $q = 2$ のとき

$$x_2 = \left|2\cdot\frac{1}{2^p + 1} - 1\right| = \left|\frac{2 - 2^p - 1}{2^p + 1}\right| = \frac{2^p - 1}{2^p + 1}$$

したがって，$q = 2$ のとき成立する.

［2］ $q = k$ のとき $(2 \leqq k \leqq p)$，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \left|2\cdot\frac{2^p - (2^{k-1} - 1)}{2^p + 1} - 1\right| \\ &= \left|\frac{2\cdot 2^p - 2^k + 2 - (2^p + 1)}{2^p + 1}\right| \\ &= \left|\frac{2^p - (2^k - 1)}{2^p + 1}\right| = \frac{2^p - (2^k - 1)}{2^p + 1} \end{aligned}$$

したがって，$q = k + 1$ のときも $(*)$ は成立する.

よって，$2 \leqq q \leqq p$ である整数 q について，$(*)$ は成立する.

この結果から．$q = p + 1$ のとき

$$\begin{aligned} x_{p+1} = |2x_p - 1| &= \left|2\cdot\frac{2^p - (2^{p-1} - 1)}{2^p + 1} - 1\right| \\ &= \left|\frac{2^p + 2 - (2^p + 1)}{2^p + 1}\right| = \frac{1}{2^p + 1} = x_1 \end{aligned}$$