平成 31 年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)120 分
理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
国際人間科学 (環境共生 (理科系))・海事科学

$\boxed{\mathbf{1}}$ 以下の問に答えよ．

(1) 関数

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

の $x > 0$ における最大値とそのときの x の値を求めよ．

(2) a を $a \neq 1$ をみたす正の実数とする．曲線 $y = e^x$ と曲線 $y = x^a$ $(x > 0)$ が共有点 P をもち，さらに点 P において共通の接線をもつとする．点 P の x 座標を t とするとき，a と t の値を求めよ．

(3) a と t を (2) で求めた実数とする．x を $x \neq t$ をみたす正の実数とするとき，e^x と x^a の大小を判定せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2$ をみたす △PAB を考え，辺 AB の中点を M，△PAB の重心を G とする．以下の問に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{AGB} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ．

(3) 点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \dfrac{5}{4}$ をみたすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ．ただし，$0 < \angle\mathrm{ABG} < \pi$ とする．

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を 2 以上の整数とする．2 個のさいころを同時に投げるとき，出た目の数の積を n で割った余りが 1 となる確率を P_n とする．以下の問に答えよ．

(1) P_2，P_3，P_4 を求めよ．

(2) $n \geqq 36$ のとき，P_n を求めよ．

(3) $P_n = \dfrac{1}{18}$ となる n をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を $\{a_n\}$ とする．

$$1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4, \cdots$$

すなわち，$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4$ で，4 以上の自然数 n に対し，$a_n = a_{n-3}$ とする．この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする．以下の問に答えよ．

(1) S_n を求めよ．

(2) $S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ．

(3) どのような自然数 k に対しても，$S_n = k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 媒介変数表示

$$x = \sin t, \quad y = (1 + \cos t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする．以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ．

(2) C の凹凸を調べ，C の概形を描け．

(3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ を微分すると　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

よって　$\boldsymbol{x=e}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$

(2) $g(x)=e^x$，$h(x)=x^a$ とおくと　$g'(x)=e^x$，$h'(x)=ax^{a-1}$

条件より，$g(t)=h(t)$，$g'(t)=h'(t)$ であるから

$$(*)\begin{cases} e^t=t^a \\ e^t=at^{a-1} \end{cases}$$

上の 2 式から，e^t を消去すると

$$t^a=at^{a-1}\quad \text{ゆえに}\quad (t-a)t^{a-1}=0$$

$t>0$ より，$t=a$ であるから，これを $(*)$ の第 1 式に代入して

$$e^a=a^a\quad \text{ゆえに}\quad a=e\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a=t=e}$$

(3) 条件より，e^x $(x\neq e)$ と x^e の大小を比較する．(1) の結果から

$$\frac{1}{e}>\frac{\log x}{x}\quad \text{ゆえに}\quad x>e\log x\quad \text{よって}\quad e^x>x^e$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 点 M は辺 AB の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=\frac{1}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2)+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\quad\cdots①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=2$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2=4\quad\text{ゆえに}\quad|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=4+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

上の結果を ① に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=\frac{1}{4}(4+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+1}$$

(2) 点 G は △PAB の重心であるから　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=3\overrightarrow{\mathrm{GM}}\quad\cdots②$

また，$\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}})$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\dfrac{3}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}})\quad\cdots③$

$\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}=0\quad\text{および}\quad|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=2^2=4$$

③ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2&=\frac{9}{4}|\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2=\frac{9}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}}+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2)\\&=\frac{9}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2)=\frac{9}{4}\cdot4=9\end{aligned}$$

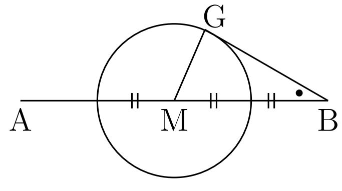
これを (1) の結果に代入して　$9=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+1$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=8}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{5}{4}$ を (1) の結果に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2=1+\frac{5}{4}\quad\text{ゆえに}\quad|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=\frac{3}{2}$$

これに ② を代入することにより　$|\overrightarrow{\mathrm{GM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MG}}|=\dfrac{1}{2}$

したがって，G は M を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にある．B からこの円に引いた接線と辺 AB のなす角が求める最大値であるから，MB $=1$ より



$$\boldsymbol{\angle\mathrm{ABG}=\frac{\pi}{6}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2個のさいころの出た目をそれぞれa，bとし，$X=ab-1$とおくと，Xは右の表のようになる．

$X=ab-1$

$a \backslash b$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	3	5	7	9	11
3	2	5	8	11	14	17
4	3	7	11	15	19	23
5	4	9	14	19	24	29
6	5	11	17	23	29	35

$$X \equiv 0 \pmod{n} \quad \cdots (*)$$

を満たすXの個数について

$n=2$のとき，次の9個

$0,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 8,\ 14,\ 14,\ 24$

$n=3$のとき，次の8個

$0,\ 3,\ 3,\ 3,\ 9,\ 9,\ 15,\ 24$

$n=4$のとき，次の5個

$0,\ 4,\ 4,\ 8,\ 24$

よって　$P_2=\dfrac{9}{36}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$，$P_3=\dfrac{8}{36}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$，$P_4=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}$

(2) $n \geqq 36$のとき，$(*)$を満たすXの個数は　1個

よって，$n \geqq 36$のとき　$P_n=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{36}}$

(3) $P_n=\dfrac{1}{18}=\dfrac{2}{36}$であるから，$(*)$を満たす$X$が2個，すなわち，0以外に1個だけ，$(*)$を満たす$n$を求めればよい．$a \neq b$のときの次の$X$について

$$\{1,2,3,4,5,7,9,11,14,17,19,23,29\} \quad \cdots ①$$

これらは，$(*)$を満たすXが2個以上存在するので，これらは含まない．

また，(2)の結果から，$n \geqq 36$を含まない．

以上を除く，$a=b$のとき

$$8=2^3, \quad 15=3 \cdot 5, \quad 24=2^3 \cdot 3, \quad 35=5 \cdot 7$$

これらの4数の約数で他の数の約数に含まれないこと，さらに①に含まれないことに注意すると，求めるnは

$2 \cdot 3,\quad 2^2 \cdot 3,\quad 3 \cdot 5,\quad 2^3 \cdot 3,\quad 5 \cdot 7$　すなわち　**6，12，15，24，35**

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) (i) $n \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_3 + (1+3+4)\frac{n-3}{3} = 8 + \frac{8}{3}(n-3) = \frac{8n}{3}$$

(ii) $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_1 + (3+4+1)\frac{n-1}{3} = 1 + \frac{8}{3}(n-1) = \frac{8n-5}{3}$$

(iii) $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_2 + (4+1+3)\frac{n-2}{3} = 4 + \frac{8}{3}(n-2) = \frac{8n-4}{3}$$

よって $$\boldsymbol{S_n = \begin{cases} \dfrac{8n}{3} & (n \equiv 0 \pmod 3) \\ \dfrac{8n-5}{3} & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ \dfrac{8n-4}{3} & (n \equiv 2 \pmod 3) \end{cases}}$$

(2) $n = 3m + r$ とおくと $(r = 0,\ 1,\ 2)$

$r = 0$ のとき $\quad S_{3m} = \dfrac{8\cdot 3m}{3} = 8m$

$r = 1$ のとき $\quad S_{3m+1} = \dfrac{8(3m+1)-5}{3} = 8m+1$

$r = 2$ のとき $\quad S_{3m+2} = \dfrac{8(3m+2)-4}{3} = 8m+4$

$2019 \equiv 3 \pmod 8$ であるから，$S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しない．

(3) i) $k \equiv 0, \pm 4 \pmod 8$ のとき $\quad k^2 \equiv 0 \pmod 8$

ii) $k \equiv \pm 1, \pm 3 \pmod 8$ のとき $\quad k^2 \equiv 1 \pmod 8$

iii) $k \equiv \pm 2 \pmod 8$ のとき $\quad k^2 \equiv 4 \pmod 8$

i)～iii) および (2) の結果から，どのような自然数 k に対しても，

$$S_n = k^2$$

となる自然数 n が存在する．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $x=\sin t$，$y=(1+\cos t)\sin t \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$ より

$$\frac{dx}{dt}=\cos t, \quad \frac{dy}{dt}=-\sin^2 t+(1+\cos t)\cos t=2\cos^2 t+\cos t-1$$

したがって

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\cos^2 t+\cos t-1}{\cos t}=2\cos t+1-\frac{1}{\cos t}$$

$$=\boldsymbol{\frac{(\cos t+1)(2\cos t-1)}{\cos t}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(2\cos t+1-\frac{1}{\cos t}\right)$$

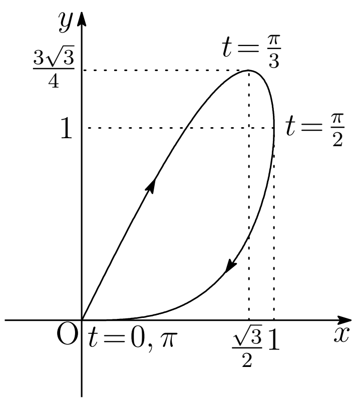
$$=\frac{d}{dt}\left(2\cos t+1-\frac{1}{\cos t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\left(-2\sin t-\frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=-\frac{\sin t(2\cos^2 t+1)}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{\cos t}=\boldsymbol{-\frac{\sin t(2\cos^2 t+1)}{\cos^3 t}}$$

(2) (1) の結果から　$0<t<\dfrac{\pi}{2}$のとき　$\dfrac{d^2y}{dx^2}<0$ より　上に凸

$\dfrac{\pi}{2}<t<\pi$のとき　$\dfrac{d^2y}{dx^2}>0$ より　下に凸

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt})$		$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	
(x,y)	$(0,0)$		$(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{4})$		$(1,1)$		$(0,0)$



(3) 曲線 C で囲まれる領域の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\sin 0}^{\sin\frac{\pi}{2}} y\,dx - \int_{\sin\pi}^{\sin\frac{\pi}{2}} y\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\frac{dx}{dt}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\pi} y\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_0^{\pi} (1+\cos t)\sin t\cos t\,dt \\
&= -\int_0^{\pi} \{\cos t + (\cos t)^2\}(\cos t)'dt \\
&= -\left[\ \frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{3}\cos^3 t\ \right]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

別解　　$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \pi$ のとき　$\cos t = -\sqrt{1-\sin^2 t}$

$x = \sin t$，$y = (1+\cos t)\sin t$　$(0 \leqq t \leqq \pi)$ より

$$y = (1 \pm \sqrt{1-x^2})x$$

したがって，求める面積 S は，2 曲線

$$y = (1+\sqrt{1-x^2})x, \quad y = (1-\sqrt{1-x^2})x \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

で囲まれた部分の面積であるから

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 (1+\sqrt{1-x^2})x\,dx - \int_0^1 (1-\sqrt{1-x^2})x\,dx \\
&= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\ -\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\ \right]_0^1 = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$