平成30年度　神戸大学２次試験前期日程(数学問題)120分
理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・
国際人間科学(環境共生(理科系))・海事科学

1 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．OABC を1辺の長さが1の正四面体とする．辺OA を $1-t:t$ に内分する点をP，辺OB を $t:1-t$ に内分する点をQ，辺BC の中点をRとする．また $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ．

(3) t が(2)で求めた値をとるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ．

2 k を2以上の整数とする．また

$$f(x) = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $x > 0$ において，関数 $y = f(x)$ の増減と漸近線を調べてグラフの概形をかけ．

(2) 数列 $\{x_n\}$ が $x_1 > 1$，$x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を満たすとき，$x_n > 1$ を示せ．

(3) (2)の数列 $\{x_n\}$ に対し，

$$x_{n+1} - 1 < \frac{k-1}{k}(x_n - 1)$$

を示せ．また $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ．

3 さいころを3回ふって，1回目に出た目の数を a，2回目と3回目に出た目の数の和を b とし，2次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \cdots(*)$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ．

(2) $(*)$ が整数を解にもつとする．このとき $(*)$ の解は共に正の整数であり，また少なくとも1つの解は3以下であることを示せ．

(3) $(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ．

$\boxed{4}$ 整式 $f(x)$ は実数を係数にもつ 3 次式で，3 次の係数は 1，定数項は -3 とする．方程式 $f(x)=0$ は，1 と虚数 α, β を解にもつとし，α の実部は 1 より大きく，α の虚部は正とする．複素数平面上で α, β, 1 が表す点を順に A，B，C とし，原点を O とする．以下の問に答えよ．

(1) α の絶対値を求めよ．

(2) θ を α の偏角とする．$\triangle$ABC の面積 S を θ を用いて表せ．

(3) S を最大にする θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とそのときの整式 $f(x)$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 座標空間において，O を原点とし，A(2, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(1, 1, 0) とする．$\triangle$OAB を直線 OC の周りに 1 回転してできる回転体を L とする．以下の問に答えよ．

(1) 直線 OC 上にない点 P$(x,\ y,\ z)$ から直線 OC におろした垂線を PH とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ を x，y，z の式で表せ．

(2) 点 P$(x,\ y,\ z)$ が L の点であるための条件は

$$z^2 \leqq 2xy \text{ かつ } 0 \leqq x+y \leqq 2$$

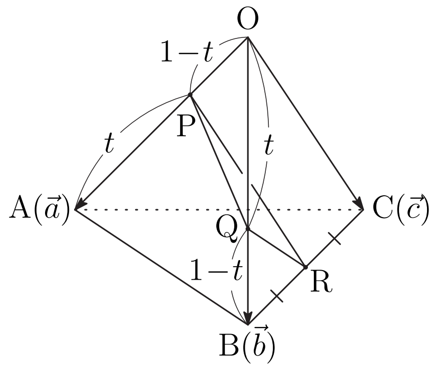
であることを示せ．

(3) $1 \leqq a \leqq 2$ とする．L を平面 $x=a$ で切った切り口の面積 $S(a)$ を求めよ．

(4) 立体 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,(x,\ y, z) \in L,\ 1 \leqq x \leqq 2\}$ の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-t\vec{b}$$

$$=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

(2) $\angle\mathrm{PQR}=\frac{\pi}{2}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ であるから

$$\{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}\}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right\}=0$$

ゆえに　$(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}-t\left(\frac{1}{2}-t\right)|\vec{b}|^2-\frac{1}{2}t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

上式に $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，$|\vec{b}|=1$ を代入すると

$$\frac{1}{2}(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)+\frac{1}{4}(1-t)-t\left(\frac{1}{2}-t\right)-\frac{1}{4}t=0$$

整理すると　$6t^2-7t+2=0$　ゆえに　$(2t-1)(3t-2)=0$

$0<t<1$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{t=\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}}$

(3) (i) $t=\frac{1}{2}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{1}{2}\vec{c}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\frac{1}{2}|\vec{c}|=\frac{1}{2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2-2\cdot\frac{1}{2}+1^2}=\frac{1}{2}$

よって　$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$

(ii) $t=\frac{2}{3}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\frac{1}{6}(-\vec{a}+3\vec{c})$

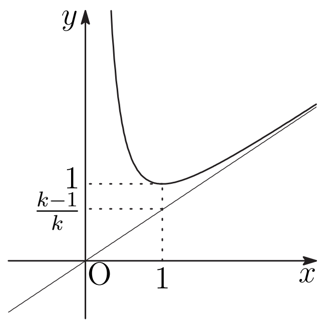
ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}=\frac{1}{3}\sqrt{1^2-4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot1^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\frac{1}{6}\sqrt{|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{c}+9|\vec{c}|^2}=\frac{1}{6}\sqrt{1^2-6\cdot\frac{1}{2}+9\cdot1^2}=\frac{\sqrt{7}}{6}$

よって　$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{7}}{6}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{36}}$

2 (1) $f(x)=\dfrac{1}{k}\left((k-1)x+\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$ より

$$f'(x)=\frac{1}{k}(k-1)\left(1-\frac{1}{x^k}\right)\quad\cdots(*)$$



$x>0$ において，$f(x)$ の増減は

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{k-1}{k}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{kx^{k-1}}=0$$

したがって，$y=f(x)$ の漸近線は　　$\boldsymbol{x=0,\ y=\dfrac{k-1}{k}x}$

よって，グラフの概形は右の図のようになる．

(2) $x_n>1$ であることを数学的帰納法により示す．

［1］$x_1>1$ であるから，$n=1$ のとき成立する．

［2］$n=j$ のとき，$x_j>1$ であると仮定すると，平均値の定理により

$$\frac{x_{j+1}-1}{x_j-1}=\frac{f(x_j)-f(1)}{x_j-1}=f'(c)$$

を満たす $c\ (1<c<x_j)$ が存在する．このとき，$(*)$ より

$$0<f'(c)=\frac{k-1}{k}\left(1-\frac{1}{c^k}\right)<\frac{k-1}{k}$$

したがって　　$0<\dfrac{x_{j+1}-1}{x_j-1}<\dfrac{k-1}{k}\quad\cdots(**)$

よって，$x_j>1$ のとき，$x_{j+1}>1$ が成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，$x_n>1$ が成立する．

(3) $(**)$ より，$n>1$ のとき　$0<\displaystyle\prod_{j=1}^{n-1}\frac{x_{j+1}-1}{x_j-1}<\prod_{j=1}^{n-1}\frac{k-1}{k}$

したがって　　$0<\dfrac{x_n-1}{x_1-1}<\left(\dfrac{k-1}{k}\right)^{n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}=0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-1)=0\quad すなわち\quad \lim_{n\to\infty}x_n=1$$

解説 (2) ですべての自然数 n について，$x_n > 1$ を示した (下に有界).

$x > 1$ のとき

$$f(x) - x = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}}\right) - x$$
$$= \frac{1}{k}\left(-1 + \frac{1}{x^{k-1}}\right) = \frac{1-x^k}{kx^{k-1}} < 0$$

$x_j > 1$ のとき，$f(x_j) - x_j < 0$ 　ゆえに　$x_{j+1} < x_j$

$\{x_n\}$ は下に有限な単調減少列であるから，$\{x_n\}$ は極限値をもつ[1].

$x > 1$ ($0 < x < 1$ でもよい) のとき，$f(x) - 1 > 0$ は，次式からも示される.

$$f(x) - 1 = \frac{1}{k}\left((k-1)x + \frac{1}{x^{k-1}}\right) - 1$$
$$= \frac{1}{kx^{k-1}}\{(k-1)x^k - kx^{k-1} + 1\}$$
$$= \frac{(x-1)^2}{kx^{k-1}}\sum_{j=1}^{k-1} jx^{j-1}$$

または，$f''(x) = \dfrac{k-1}{x^{k+1}}$ より，$x > 0$ において，$f''(x) > 0$ であるから

$$f(x) - 1 = f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t)\,dt = -\int_1^x (x-t)'f'(t)\,dt$$
$$= -\Big[\,(x-t)f'(t)\,\Big]_1^x + \int_1^x (x-t)f''(t)\,dt$$
$$= (x-1)f'(1) + \int_1^x (x-t)f''(t)\,dt = \int_1^x (x-t)f''(t)\,dt$$

$1 < x$ のとき，$1 < t < x$ において，$x - t > 0$ より　$\displaystyle\int_1^x (x-t)f''(t)\,dt > 0$

$x < 1$ のとき，$x < t < 1$ において，$t - x > 0$ より

$$\int_1^x (x-t)f''(t)\,dt = \int_x^1 (t-x)f''(t) > 0$$

したがって，$0 < x_1 < 1$ であっても，$x_j > 1$ $(j = 2, 3, \cdots)$ より

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/nagasaki/nagasaki_2008.pdf $\boxed{8}$ を参照.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2次方程式 $x^2-ax+b=0\cdots(*)$ が $x=1$ を解にもつから　$b=a-1$

$1\leqq a\leqq 6$，$2\leqq b\leqq 12$ であるから

$$(a,\ b)=(3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 5)$$

a の値に対する確率は $\dfrac{1}{6}$，それぞれの b の値に対する確率は

b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}\right)=\frac{10}{216}=\mathbf{\frac{5}{108}}$$

(2) 2次方程式 $(*)$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=a,\quad \alpha\beta=b$$

$(*)$ の整数解を α とすると，上の第1式から

$$\beta=a-\alpha$$

上式の右辺は整数であるから，β も整数である．

2整数 $\alpha,\ \beta$ について，$\alpha\leqq\beta$ とおいても一般性を失わないから

$$2\alpha\leqq\alpha+\beta=a\leqq 6\quad \text{ゆえに}\quad \alpha\leqq 3$$

(3) (i) $x=2$ が2次方程式 $(*)$ の解のとき　$b=2a-4$

$$(a,\ b)=(3,\ 2),\ (4,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 8)$$

(ii) $x=3$ が2次方程式 $(*)$ の解のとき　$b=3a-9$

$$(a,\ b)=(4,\ 3),\ (5,\ 6)\ (6,\ 9)$$

(1),(i),(ii) より

a	3	4	4,5	6	5	6	6
b	2	3	4	5	6	8	9

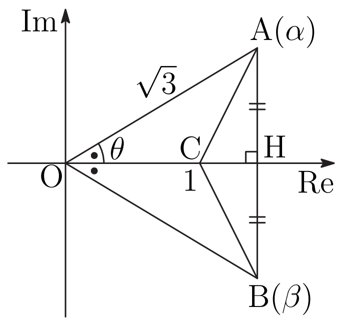
よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}\cdot 2+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}\right)=\frac{27}{216}=\mathbf{\frac{1}{8}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 実数を係数とする3次方程式が虚数αを解にもつとき，$\overline{\alpha}$もこの方程式の解であるから，$\beta=\overline{\alpha}$である．3次方程式の解と係数の関係から

$$\alpha\beta\cdot 1=|\alpha|^2=-\frac{-3}{1}\quad ゆえに\quad \boldsymbol{|\alpha|=\sqrt{3}}$$

(2) 右の図において



$$\begin{aligned}\mathrm{CH}&=\mathrm{OH}-\mathrm{OC}=\sqrt{3}\cos\theta-1\\ \mathrm{AH}&=\sqrt{3}\sin\theta\end{aligned}$$

よって　$S=2\triangle\mathrm{ACH}=2\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{AH}\cdot\mathrm{CH}$

$$=\boldsymbol{\sqrt{3}\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta-1)}$$

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$において，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$の解を$\theta=\varphi$とし，

$$g(\theta)=\frac{S}{\sqrt{3}}=\sin\theta(\sqrt{3}\cos\theta-1)\quad(0<\theta<\varphi)$$

とすると

$$\begin{aligned}g'(\theta)&=\cos\theta(\sqrt{3}\cos\theta-1)+\sin\theta(-\sqrt{3}\sin\theta)\\ &=2\sqrt{3}\cos^2\theta-\cos\theta-\sqrt{3}\\ &=(\sqrt{3}\cos\theta+1)(2\cos\theta-\sqrt{3})\end{aligned}$$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$より，$\cos\dfrac{\pi}{6}>\cos\varphi$，すなわち，$\dfrac{\pi}{6}<\varphi$に注意して

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	(φ)
$g'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$g(\theta)$		↗	極大	↘	

よって，Sを最大にするθは　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$

ゆえに　$\alpha=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta=\overline{\alpha}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

したがって，$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=3$より，2数α, βを解とする2次方程式は

$$x^2-3x+3=0$$

よって　$f(x)=(x-1)(x^2-3x+3)=\boldsymbol{x^3-4x^2+6x-3}$

別解 $\alpha = p + qi$ とおくと $(1 < p < \sqrt{3},\ q > 0)$ $\quad p^2 + q^2 = 3$

$S = (p-1)q$ より $\quad S^2 = (p-1)^2q^2 = (p-1)^2(3-p^2)$

$h(p) = (p-1)^2(3-p^2)$ とおくと $(1 < p < \sqrt{3})$

$$\begin{aligned} h'(p) &= 2(p-1)(3-p^2) + (p-1)^2\cdot(-2p) \\ &= 2(p-1)\{(3-p^2) - p(p-1)\} \\ &= -2(p-1)(2p^2 - p - 3) \\ &= -2(p-1)(2p-3)(p+1) \end{aligned}$$

p	(1)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	$(\sqrt{3})$
$h'(p)$		$+$	0	$-$	
$h(p)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

S が極大となるとき，$p = \dfrac{3}{2}$ であるから

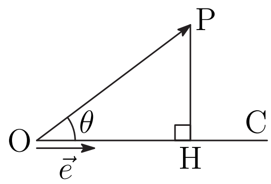
$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + q^2 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad q = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって $\quad \alpha = \dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \beta = \dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \theta = \arg\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}$ とおくと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e})\vec{e}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{x+y}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{x+y}{2}(1,\ 1,\ 0)=\left(\boldsymbol{\frac{x+y}{2},\ \frac{x+y}{2},\ 0}\right),\\\overrightarrow{\mathrm{HP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(x,\ y,\ z)-\left(\frac{x+y}{2},\ \frac{x+y}{2},\ 0\right)\\&=\left(\boldsymbol{\frac{x-y}{2},\ \frac{y-x}{2},\ z}\right)\end{aligned}$$

補足 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と同じ方向の単位ベクトルを $\vec{e}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とすると



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{e}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta)\vec{e}$ であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{e})\vec{e}$

(2) P が L 上の点であるとき，$|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ であるから，$|\overrightarrow{\mathrm{HP}}|^2\leqq|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2$ より

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2+\left(\frac{y-x}{2}\right)^2+z^2\leqq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

これを整理すると　$z^2\leqq 2xy$　$\cdots$①

また，H は線分 OC 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{x+y}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より

$$0\leqq\frac{x+y}{2}\leqq 1\quad\text{すなわち}\quad 0\leqq x+y\leqq 2\quad\cdots②$$

①，② より，求める条件は　$z^2\leqq 2xy$ かつ $0\leqq x+y\leqq 2$

(3) L の平面 $x=a$ $(1 \leqq a \leqq 2)$ による断面の領域は

$$z^2 \leqq 2ay,\ 0 \leqq a+y \leqq 2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{z^2}{2a} \leqq y \leqq 2-a$$

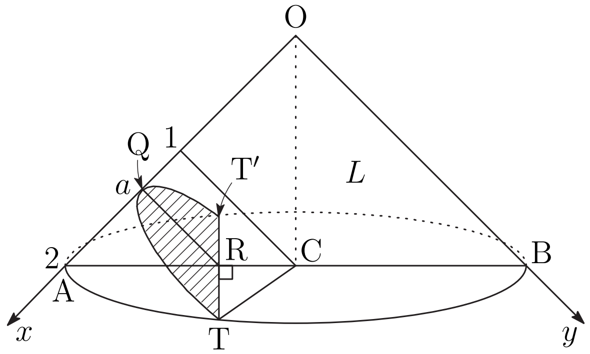
放物線 $y=\dfrac{z^2}{2a}$ と直線 $y=2-a$ の交点の z 座標は

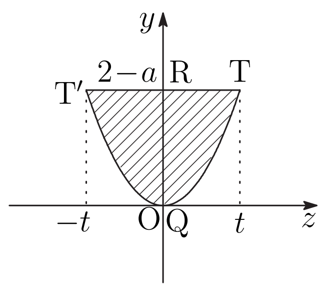
$$2-a=\frac{z^2}{2a} \quad \text{ゆえに} \quad z=\pm\sqrt{2a(2-a)}$$

したがって，$S(a)$ は下の図の斜線部分の面積である．

ここで，$t=\sqrt{2a(2-a)}$ とおくと，$2-a=\dfrac{t^2}{2a}$ に注意して

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_{-t}^{t}\left(\frac{t^2}{2a}-\frac{z^2}{2a}\right)dz=\frac{1}{2a}\int_{-t}^{t}(t+z)(t-z)dz\\ &=\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{6}\cdot(2t)^3=\frac{2t^3}{3a}\\ &=\frac{2\cdot 2a(2-a)\sqrt{2a(2-a)}}{3a}=\boldsymbol{\frac{4}{3}(2-a)\sqrt{2a(2-a)}}\end{aligned}$$





別解 平面 $x=a$ と x 軸，線分 AB との交点をそれぞれ Q，R とすると

$$\mathrm{QR}=\mathrm{QA}=2-a$$

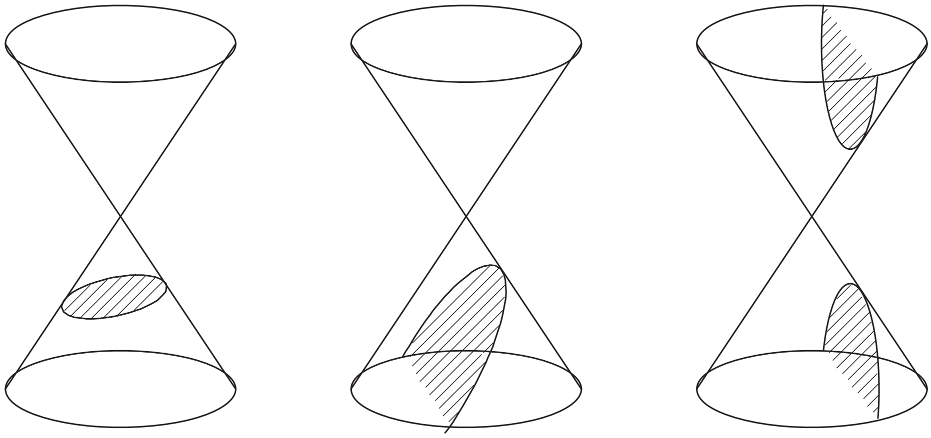
上の図において，$\mathrm{CR}=\sqrt{2}(a-1)$，$\mathrm{CT}=\mathrm{CA}=\sqrt{2}$ であるから

$$\mathrm{RT}=\sqrt{\mathrm{CT}^2-\mathrm{CR}^2}=\sqrt{2-2(a-1)^2}=\sqrt{2a(2-a)}$$

円錐の母線に平行な平面 $x=a$ による切り口は放物線であるから

$$\begin{aligned}S(a) &= \frac{2}{3}\mathrm{QR}\cdot\mathrm{TT'}=\frac{2}{3}\mathrm{QR}\cdot 2\mathrm{RT}\\ &=\frac{2}{3}(2-a)\cdot 2\sqrt{2a(2-a)}=\frac{4}{3}(2-a)\sqrt{2a(2-a)}\end{aligned}$$

補足 平面による円錐面の切り口は2次曲線である．そのため，2次曲線を円錐曲線ともいう．とくに，放物線となるのは，平面が母線と平行な場合である．また，直線となるのは，平面が頂点を通り，母線に平行な場合である．とくに，平面が頂点のみを共有するとき，円錐曲線は1点に退化する．



楕円　　放物線　　双曲線

(4) (3) の結果から，求める立体の体積を V とすると

$$V=\int_1^2 S(a)\,da=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_1^2(2-a)\sqrt{1-(a-1)^2}\,da$$

$u=a-1$ とおくと　$\dfrac{du}{da}=1$

a	$1\longrightarrow 2$
u	$0\longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}\int_1^2(2-a)\sqrt{1-(a-1)^2}\,da&=\int_0^1(1-u)\sqrt{1-u^2}\,du\\&=\int_0^1\sqrt{1-u^2}\,du-\int_0^1 u\sqrt{1-u^2}\,du\\&=\frac{\pi}{4}+\left[\frac{1}{3}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}\end{aligned}$$

よって　　$V=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{4}{9}\right)\sqrt{2}}$