平成 29 年度　神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
国際人間科学 (環境共生 (理科系))・海事科学

1 n を自然数とする．

$$f(x) = \sin x - nx^2 + \frac{1}{9}x^3$$

とおく．$3 < \pi < 4$ であることを用いて，以下の問に答えよ．

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x) < 0$ であることを示せ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ．

(3) (2) における解を x_n とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx_n$ を求めよ．

2 n を自然数とする．以下の問に答えよ．

(1) 実数 x に対して，次の等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式をみたす S の値を求めよ．

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - S = (-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

(3) 不等式

$$\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx \leqq \frac{1}{n+1}$$

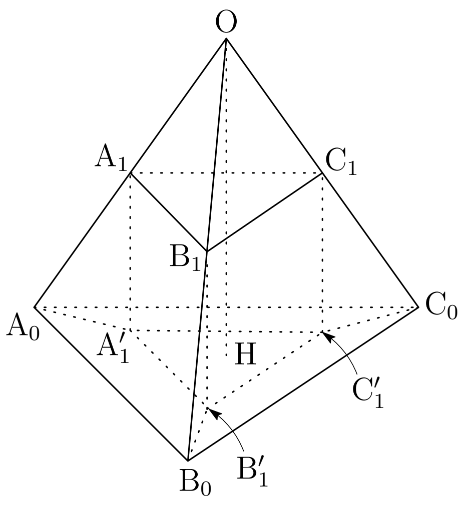
が成り立つことを示し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1辺の長さがa_0の正四面体$\mathrm{OA_0B_0C_0}$がある．図のように，辺$\mathrm{OA_0}$上の点$\mathrm{A_1}$，辺$\mathrm{OB_0}$上の点$\mathrm{B_1}$，辺$\mathrm{OC_0}$上の点$\mathrm{C_1}$から平面$\mathrm{A_0B_0C_0}$に下ろした垂線をそれぞれ$\mathrm{A_1A_1'}$，$\mathrm{B_1B_1'}$，$\mathrm{C_1C_1'}$としたとき，三角柱$\mathrm{A_1B_1C_1}-\mathrm{A_1'B_1'C_1'}$は正三角柱になるとする．ただし，ここでは底面が正三角形であり，側面が正方形である三角柱を正三角柱とよぶことにする．同様に，点$\mathrm{A_2}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{C_2}$，$\mathrm{A_2'}$，$\mathrm{B_2'}$，$\mathrm{C_2'}$，$\cdots$を次のように定める．正四面体$\mathrm{OA}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$において，辺$\mathrm{OA}_k$上の点$\mathrm{A}_{k+1}$，辺$\mathrm{OB}_k$上の点$\mathrm{B}_{k+1}$，辺$\mathrm{OC}_k$上の点$\mathrm{C}_{k+1}$から平面$\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k$に下ろした垂線をそれぞれ$\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}'_{k+1}$，$\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{B}'_{k+1}$，$\mathrm{C}_{k+1}\mathrm{C}'_{k+1}$としたとき，三角柱$\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}-\mathrm{A}'_{k+1}\mathrm{B}'_{k+1}\mathrm{C}'_{k+1}$は正三角柱になるとする．辺$\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$の長さを$a_k$とし，正三角柱$\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k-\mathrm{A}'_k\mathrm{B}'_k\mathrm{C}'_k$の体積を$V_k$とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 点Oから平面$\mathrm{A_0B_0C_0}$に下ろした垂線をOHとし，$\theta=\angle\mathrm{OA_0H}$とするとき，$\cos\theta$と$\sin\theta$の値を求めよ．

(2) a_1をa_0を用いて表せ．

(3) V_kをa_0を用いて表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}V_k$を求めよ．



4 $\vec{v}_1=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v}_2=(1,-1,-1)$，$\vec{v}_3=(-1,\ 1,-1)$，$\vec{v}_4=(-1,-1,\ 1)$ とする．座標空間内の動点Pが原点Oから出発し，正四面体のサイコロ (1，2，3，4の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で出る) をふるごとに，出た目が k $(k=1,2,3,4)$ のときは $\vec{v}_k$ だけ移動する．すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点Pの位置を P_n として，サイコロを $(n+1)$ 回目にふって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\vec{v}_k$$

である．ただし，$\mathrm{P}_0=\mathrm{O}$ である．以下の問に答えよ．

(1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2}\perp\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ となる確率を求めよ．

(3) 4点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率を求めよ．

(4) n を6以下の自然数とする．$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$ となる確率を求めよ．

5 r，c，ω は正の定数とする．座標平面上の動点Pは時刻 $t=0$ のとき原点にあり，毎秒 c の速さで x 軸上を正の方向へ動いているとする．また，動点Qは時刻 $t=0$ のとき点 $(0,-r)$ にあるとする．点Pから見て，動点Qが点Pを中心とする半径 r の円周上を毎秒 ω ラジアンの割合で反時計回りに回転しているとき，以下の問に答えよ．

(1) 時刻 t における動点Qの座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ．

(2) 動点Qの描く曲線が交差しない，すなわち，$t_1\neq t_2$ ならば $(x(t_1),\ y(t_1))\neq(x(t_2),\ y(t_2))$ であるための必要十分条件を r，c，ω を用いて与えよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x) = \sin x - nx^2 + \dfrac{1}{9}x^3$ より

$$f'(x) = \cos x - 2nx + \frac{1}{3}x^2,$$
$$f''(x) = -\sin x - 2n + \frac{2}{3}x$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\pi < 4$ に注意して

$$f''(x) < -2n + \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2} < -2\cdot 1 + \frac{\pi}{3} < -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} < 0$$

(2) $f'(0) = 1 > 0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2n\cdot\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$

$$= -\pi\left(n - \frac{\pi}{12}\right) = -\pi\left(1 - \frac{\pi}{12}\right) < 0$$

(1) の結果から，$f'(x)$ は単調減少であるから，上の結果により

$$f'(\alpha) = 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす α が唯一存在する．

また　$f(0) = 0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - n\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3$

$$< 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{9}\left(\frac{4}{2}\right)^3 = -\frac{13}{36} < 0$$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$f(\frac{\pi}{2})$

よって，方程式 $f(x) = 0$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ 1 つの解をもつ．

(3) $f(x_n) = 0$ であるから　$\sin x_n - n{x_n}^2 + \dfrac{1}{9}{x_n}^3 = 0 \quad \cdots(*)$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} {x_n}^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin x_n + \frac{1}{9}{x_n}^3\right) = 0$　よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

上式および $(*)$ から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n} + \frac{1}{9}{x_n}^2\right) = \mathbf{1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $t \neq 0$ のとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$ ゆえに $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^n - \frac{1}{1-t} = -\frac{t^{n+1}}{1-t}$

$t = -e^{-x}$ とおいて，上式に代入すると

$$\sum_{k=0}^{n}(-e^{-x})^k - \frac{1}{1+e^{-x}} = -\frac{(-e^{-x})^{n+1}}{1+e^{-x}}$$

よって $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) (1) の結果から $$\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^{-kx} - \frac{1}{1+e^{-x}} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k e^{-kx} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

したがって

$$\begin{aligned}(-1)^n \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \int_0^1 e^{-kx}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \left[-\frac{e^{-kx}}{k}\right]_0^1 - \Big[\log(1+e^{-x})\Big]_0^1 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - \log\frac{1+e^{-1}}{2} \qquad \cdots(*)\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{S = \log\dfrac{1+e^{-1}}{2}}$

(3) $0 \leqq \dfrac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} \leqq e^{-(n+1)x}$ であるから

$$\begin{aligned}0 \leqq \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx \leqq \int_0^1 e^{-(n+1)x}dx &= \left[-\frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1-e^{-n-1}}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ から，はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}} = 0$

$(*)$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} - \log\frac{1+e^{-1}}{2} = 0$

よって $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k} = \boldsymbol{\log\frac{1+e^{-1}}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 直角三角形 $\mathrm{OA_0H}$ について　$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{A_0H}}{\mathrm{OA_0}} = \dfrac{\mathrm{A_0H}}{a_0}$

H は $\triangle \mathrm{A_0B_0C_0}$ の外心であるから，正弦定理により

$$\frac{a_0}{\sin 60^\circ} = 2\mathrm{A_0H} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{A_0H}}{a_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

また　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{1}{3}} = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{2}{3}}}$

(2) $\mathrm{OA_1} = \mathrm{A_1B_1} = a_1$ より　$\mathrm{A_0A_1} = a_0 - a_1$

$\mathrm{A_1A_1'} = \mathrm{A_0A_1}\sin\theta = (a_0 - a_1)\sin\theta$ であるから，$\mathrm{A_1B_1} = \mathrm{A_1A_1'}$ のとき

$$a_1 = (a_0 - a_1)\sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad a_1 = \frac{a_0\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

よって　$a_1 = \dfrac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}}a_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}a_0 = \boldsymbol{(\sqrt{6}-2)a_0}$

(3) (2) と同様にして　$a_{k+1} = (\sqrt{6}-2)a_k$　ゆえに　$a_k = (\sqrt{6}-2)^k a_0$

したがって　$V_k = \dfrac{1}{2}{a_k}^2 \sin 60^\circ \cdot a_k = \dfrac{\sqrt{3}}{4}{a_k}^3 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{6}-2)^{3k}{a_0}^3$

$|\sqrt{6}-2| < 1$ に注意して

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} V_k &= \frac{\sqrt{3}{a_0}^3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{6}-2)^{3k} \\ &= \frac{\sqrt{3}{a_0}^3}{4}\cdot\frac{(\sqrt{6}-2)^3}{1-(\sqrt{6}-2)^3} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{18}{a_0}^3}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $i, j = 1, 2, 3, 4$ とし，$\vec{v}_i + \vec{v}_j$ が x 軸と平行になる組み合わせは

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = (2,\ 0,\ 0) \\ \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = (-2,\ 0,\ 0)\end{aligned}$$

したがって，求める確率は　$\dfrac{2!+2!}{4^2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(2) $\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は，次のベクトルからなる．

$$\begin{aligned}
&\vec{v_1}+\vec{v_1}=2\vec{v_1}, && \vec{v_2}+\vec{v_2}=2\vec{v_2},\\
&\vec{v_3}+\vec{v_3}=2\vec{v_3}, && \vec{v_4}+\vec{v_4}=2\vec{v_4},\\
&\vec{v_1}+\vec{v_2}=\vec{v_2}+\vec{v_1}=2\vec{e_1}, && \vec{v_1}+\vec{v_3}=\vec{v_3}+\vec{v_1}=2\vec{e_2},\\
&\vec{v_1}+\vec{v_4}=\vec{v_4}+\vec{v_1}=2\vec{e_3}, && \vec{v_2}+\vec{v_3}=\vec{v_3}+\vec{v_2}=-2\vec{e_3},\\
&\vec{v_2}+\vec{v_4}=\vec{v_4}+\vec{v_2}=-2\vec{e_2}, && \vec{v_3}+\vec{v_4}=\vec{v_4}+\vec{v_3}=-2\vec{e_1}
\end{aligned}$$

$\vec{v_j}\cdot\vec{e_k}\neq 0$ であるから $(j=1,2,3,4,\ k=1,2,3)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ となるのは，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ が座標軸に平行で，互いに垂直な場合について調べればよい．(1) の結果と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は，x 軸，y 軸，z 軸と平行となる確率は $\dfrac{1}{4}$ であるから，求める確率は

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\times{}_3\mathrm{P}_2=\boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

(3) $i\neq j,\ j\neq k,\ k\neq i$ のとき，$\vec{v_i},\ \vec{v_j},\ \vec{v_k}$ は1次独立であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}$ がすべて異なる場合を除く確率であるから

$$1-\frac{{}_4\mathrm{P}_3}{4^3}=1-\frac{4\cdot3\cdot2}{4^3}=\boldsymbol{\frac{5}{8}}$$

(4) $\vec{v_i}(i=1,2,3,4)$ の成分はすべて奇数である．

ゆえに，$n=1,\ 3,\ 5$ のとき，$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$ となる確率は　0

$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_4P_6}}$ は (2) で求めたベクトルである．

ゆえに，$n=2,6$ のとき，$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$ のとなる確率は　0

$n=4$ のとき，$\mathrm{P}_n=\mathrm{O}$ のとなるのは，$\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}+\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ が

$$\begin{aligned}
&2\vec{e_1}+(-2\vec{e_1}), && 2\vec{e_2}+(-2\vec{e_2}), && 2\vec{e_3}+(-2\vec{e_3}),\\
&-2\vec{e_1}+2\vec{e_1}, && -2\vec{e_2}+2\vec{e_2}, && -2\vec{e_3}+2\vec{e_3}
\end{aligned}$$

の場合である．このとき，求める確率は　$\dfrac{2}{4^2}\cdot\dfrac{2}{4^2}\times 6=\dfrac{3}{32}$

よって，求める確率は　$\boldsymbol{n=1,2,3,5,6}$ **のとき** $\boldsymbol{0}$，　$\boldsymbol{n=4}$ **のとき** $\boldsymbol{\dfrac{3}{32}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (ct,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (r\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}),\ r\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})) = (r\sin\omega t, -r\cos\omega t)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (ct + r\sin\omega t, -r\cos\omega t)$

よって　$\mathbf{Q}(\boldsymbol{ct + r\sin\omega t, -r\cos\omega t})$

(2) $(x(t_1),\ y(t_1)) = (x(t_2),\ y(t_2))$ ならば $t_1 = t_2$ であるための必要十分条件を求めればよい．(1) の結果から，$(x(t_1),\ y(t_1)) = (x(t_2),\ y(t_2))$ のとき

$$ct_1 + r\sin\omega t_1 = ct_2 + r\sin\omega t_2, \quad -r\cos\omega t_1 = -r\cos\omega t_2$$

上の 2 式から

$$r(\sin\omega t_2 - \sin\omega t_1) = c(t_2 - t_1), \quad r(\cos\omega t_2 - \cos\omega t_1) = 0$$

したがって

$$\begin{aligned} c^2(t_2 - t_1)^2 &= r^2(\sin\omega t_2 - \sin\omega t_1)^2 + r^2(\cos\omega t_2 - \cos\omega t_1)^2 \\ &= 2r^2\{1 - \cos\omega(t_2 - t_1)\} \\ &= 4r^2\sin^2\frac{\omega(t_2 - t_1)}{2} \end{aligned}$$

ここで，$\theta = \dfrac{\omega(t_2 - t_1)}{2}$ とおくと

$$c^2\left(\frac{2\theta}{\omega}\right)^2 = 4r^2\sin^2\theta \quad \text{ゆえに} \quad \frac{c}{r\omega}|\theta| = |\sin\theta|$$

これが $\theta = 0$ 以外に解をもたない条件，すなわち，方程式

$$\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right| = \frac{c}{r\omega} \quad \cdots(*)$$

が解を持たない条件を求めればよい．$f(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\theta}$ とすると，$f(-\theta) = f(\theta)$ であるから，$\theta > 0$ について調べる．

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

$y = \sin\theta$ と $y = \theta$ のグラフから，$0 < \theta \leqq \pi$ のとき

$$\theta > \sin\theta \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

$\theta > \pi$ のとき　$\left|\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right| < \dfrac{1}{\pi}$　したがって　$\left|\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right| < 1$

$(*)$ が解をもたないとき　$\dfrac{c}{r\omega} \geqq 1$　よって　$\boldsymbol{c \geqq r\omega}$