平成28年度　神戸大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・
発達科学(人間環境(理科系))・海事科学

1 四面体OABCにおいて，PをOAの中点，Qを辺OBを2 : 1に内分する点，Rを辺BCの中点とする．P，Q，Rを通る平面と辺ACの交点をSとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2) 比$|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$を求めよ．

(3) 四面体OABCを1辺の長さが1の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$を求めよ．

2 aを正の定数とし，$f(x)=|x^2+2ax+a|$とおく．以下の問に答えよ．

(1) $y=f(x)$のグラフの概形をかけ．

(2) $a=2$とする．すべての実数xに対して$f(x)\geqq 2x+b$が成り立つような実数bの取りうる値の範囲を求めよ．

(3) $0<a\leqq\dfrac{3}{2}$とする．すべての実数xに対して$f(x)\geqq 2x+b$が成り立つような実数bの取りうる値の範囲をaを用いて表せ．また，その条件をみたす点$(a,\ b)$の領域をab平面上に図示せよ．

3 aを正の定数とし，2曲線$C_1: y=\log x$，$C_2: y=ax^2$が点Pで接しているとする．以下の問に答えよ．

(1) Pの座標とaの値を求めよ．

(2) 2曲線C_1，C_2とx軸で囲まれた部分をx軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{4}$ 約数，公約数，最大公約数を次のように定める．

- 2 つの整数 a，b に対して，$a = bk$ をみたす整数 k が存在するとき，b は a の約数であるという．
- 2 つの整数に共通の約数をそれらの公約数という．
- 少なくとも一方が 0 でない 2 つの整数の公約数の中で最大のものをそれらの最大公約数という．

以下の問に答えよ．

(1) a，b，c，p は 0 でない整数で $a = pb + c$ を満たしているとする．

(i) $a = 18$，$b = 30$，$c = -42$，$p = 2$ のとき，a と b の公約数の集合 S，および b と c の公約数の集合 T を求めよ．

(ii) a と b の最大公約数を M，b と c の最大公約数を N とする．M と N は等しいことを示せ．ただし，a，b，c，p は 0 でない任意の整数とする．

(2) 自然数の列 $\{a_n\}$ を

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} + a_n \ (n = 1, 2, \cdots), \quad a_1 = 3, \ a_2 = 4$$

で定める．

(i) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

(ii) a_{n+4} を a_{n+2} と a_n を用いて表せ．

(iii) a_{n+2} と a_n の最大公約数を求めよ．

$\boxed{5}$ 極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r = 1 + \cos\theta \ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を C とする．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta} = 0$ となる点の直交座標を求めよ．

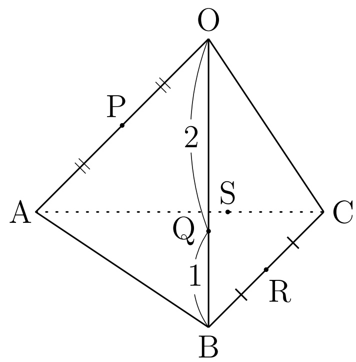
(2) $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi} \frac{dy}{dx}$ を求めよ．

(3) 曲線 C の概形を xy 平面上にかけ．

(4) 曲線 C の長さを求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 右の図から



$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{1}{2}\vec{a}=\boldsymbol{\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}}$$

(2) S は平面 PQR 上の点であるから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{2}\vec{a}+s\left(\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)+\frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$$

$$=\frac{1}{2}(1-s-t)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}s+\frac{t}{2}\right)\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}$$

このとき，S は直線 AC 上の点であるから

$$\frac{1}{2}(1-s-t)+\frac{t}{2}=1,\quad \frac{2}{3}s+\frac{t}{2}=0\quad \text{ゆえに}\quad s=-1,\ t=\frac{4}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$　よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|=2:1}$

(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{QS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})$$

したがって
$$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}|^2$$
$$=\frac{1}{9}(|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{c}\cdot\vec{a})$$

このとき　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2=\dfrac{1}{9}(1+4+4-2-4+2)=\dfrac{5}{9}$　よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $g(x) = x^2 + 2ax + a$ とおくと　$g(x) = (x+a)^2 - a^2 + a$

$a > 0$ に注意すると

(i) $-a^2 + a \geqq 0$，すなわち，$0 < a \leqq 1$ のとき，$g(x) \geqq 0$ であるから

$$f(x) = |g(x)| = g(x)$$

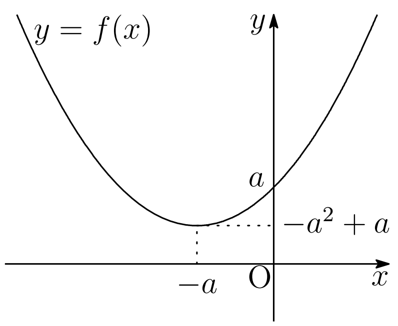
(ii) $-a^2 + a < 0$，すなわち，$1 < a$ のとき，

$g(x) = 0$ の解は　$x = -a \pm \sqrt{a^2 - a}$

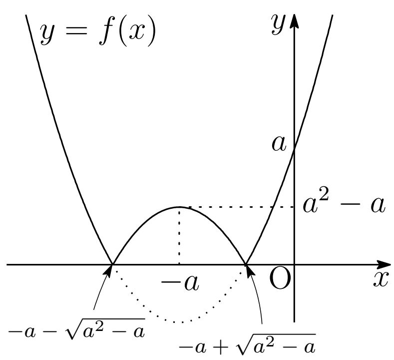
$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & (x \leqq -a - \sqrt{a^2 - a},\ -a + \sqrt{a^2 - a} \leqq x) \\ -g(x) & (-a - \sqrt{a^2 - a} \leqq x \leqq -a + \sqrt{a^2 - a}) \end{cases}$$

(i)，(ii) より，$y = f(x)$ のグラフは，次のようになる．

(i) $0 < a \leqq 1$ のとき



(ii) $1 < a$ のとき



(2) $a = 2$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は，(1)(ii) のグラフに $a = 2$ を代入して

$$x = -2 \pm \sqrt{2}$$

また，$g(x) = x^2 + 4x + 2$ であるから，$g'(x) = 2x + 4$ より

$$g'(-2 + \sqrt{2}) = 2(-2 + \sqrt{2}) + 4 = 2\sqrt{2} > 2$$

点 $(-2 + \sqrt{2},\ 0)$ が直線 $y = 2x + b$ の上側またはこの直線上にあるときで

$$0 \geqq 2(-2 + \sqrt{2}) + b \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b \leqq 4 - 2\sqrt{2}}$$

(3) (i) $0 < a \leqq 1$ のとき，すべての x について，

$$g(x) \geqq 2x + b \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 2(a-1)x + a - b \geqq 0$$

が成り立つので，係数について

$$(a-1)^2 - (a-b) \leqq 0 \quad \text{よって} \quad b \leqq -a^2 + 3a - 1$$

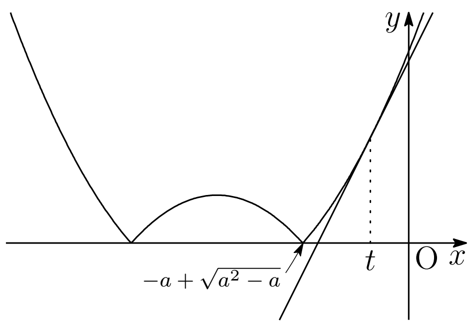
(ii) $1 < a \leqq \dfrac{3}{2}$ のとき，$g'(x) = 2x + 2a$ より

$$g'(-a + \sqrt{a^2 - a}) = 2(-a + \sqrt{a^2 - a}) + 2a = 2\sqrt{a^2 - a}$$

ここで　$a^2 - a = \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$　ゆえに　$0 < a^2 - a \leqq \dfrac{3}{4}$

このとき　$g'(-a + \sqrt{a^2 - a}) \leqq 2\sqrt{\dfrac{3}{4}} = \sqrt{3} < 2$

したがって，$y = f(x)$ と $y = 2x + b$ のグラフが接するとき，接点は，x 軸の上側にある．接点の x 座標を t とすると，$g'(t) = 2$ より



$$2t + 2a = 2$$

これを解いて　$t = 1 - a$

$y = g(x)$ 上の点 $(1 - a,\ g(1 - a))$ における接線の方程式は

$$y - g(1 - a) = 2(x - 1 + a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x - a^2 + 3a - 1$$

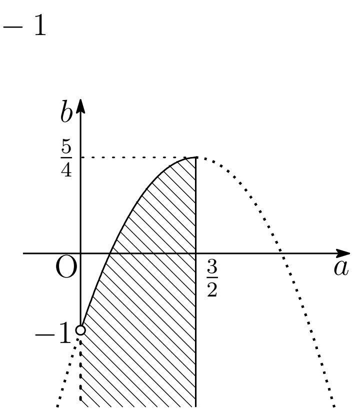
$f(x) \geqq 2x + b$ が成り立つとき，直線 $y = 2x + b$ はこの直線の下側または一致するので，求める条件は

$$b \leqq -a^2 + 3a - 1$$

よって，(i)，(ii) より，求める領域は

$$\boldsymbol{b \leqq -a^2 + 3a - 1\ (0 < a \leqq 3)}$$

また，点 $(a,\ b)$ の領域は，右の図の斜線部分部分である．



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=\log x$，$g(x)=ax^2$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$g'(x)=2ax$

点 P の x 座標を t とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ であるから

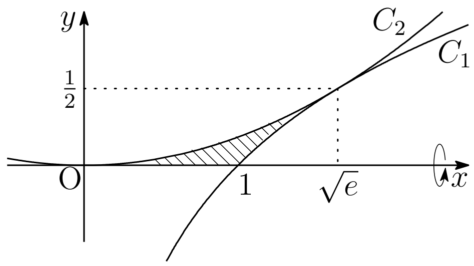
$$\log t = at^2,\quad \frac{1}{t}=2at$$

第 2 式から　$at^2=\dfrac{1}{2}$　これを第 1 式に代入すると

$$\log t=\frac{1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{t=\sqrt{e},\quad a=\frac{1}{2e}}$$

(2) 求める立体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^{\sqrt{e}}\left(\frac{x^2}{2e}\right)^2dx-\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)^2dx$$



ここで

$$\int_0^{\sqrt{e}}\left(\frac{x^2}{2e}\right)^2dx=\frac{1}{4e^2}\int_0^{\sqrt{e}}x^4\,dx=\frac{1}{4e^2}\left[\,\frac{x^5}{5}\,\right]_0^{\sqrt{e}}=\frac{\sqrt{e}}{20},$$

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{e}}(\log x)^2dx&=\left[\,x(\log x)^2\,\right]_1^{\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}x(2\log x)\cdot\frac{1}{x}\,dx\\&=\frac{\sqrt{e}}{4}-2\int_1^{\sqrt{e}}\log x\,dx\\&=\frac{\sqrt{e}}{4}-2\left[\,x(\log x-1)\,\right]_1^{\sqrt{e}}\\&=\frac{\sqrt{e}}{4}+\sqrt{e}-2=\frac{5}{4}\sqrt{e}-2\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{V}{\pi}=\dfrac{\sqrt{e}}{20}-\left(\dfrac{5}{4}\sqrt{e}-2\right)=2-\dfrac{6}{5}\sqrt{e}$

よって　$V=\boldsymbol{\left(2-\frac{6}{5}\sqrt{e}\right)\pi}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) (i) $a=18=2{\cdot}3^2$，$b=30=2{\cdot}3{\cdot}5$，$c=-42=-2{\cdot}3{\cdot}7$ より

$$S=\{\pm\mathbf{1},\ \pm\mathbf{2},\ \pm\mathbf{3},\ \pm\mathbf{6}\},$$
$$T=\{\pm\mathbf{1},\ \pm\mathbf{2},\ \pm\mathbf{3},\ \pm\mathbf{6}\}$$

(ii) n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x,y) と表記すると

$$(x,y)\,|\,x,\quad (x,y)\,|\,y$$

が成り立つ．$a=pb+c$ より　$(b,c)\,|\,a$　また，$(b,c)\,|\,b$ であるから，(b,c) は a と b の公約数，すなわち

$$(b,c)\,|\,(a,b)\quad\cdots①$$

同様に，$c=a-pb$ より　$(a,b)\,|\,c$　また，$(a,b)\,|\,b$ であるから，(a,b) は b と c の公約数，すなわち

$$(a,b)\,|\,(b,c)\quad\cdots②$$

①，② より　$(a,b)=(b,c)$　よって　$M=N$

(2) (i) (1)(ii) を $a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$ に適用すると　$(a_{n+2},a_{n+1})=(a_{n+1},a_n)$
よって　$(a_{n+1},a_n)=(a_2,a_1)=(4,3)=\mathbf{1}$

(ii) $a_{n+4}=6a_{n+3}+a_{n+2}$，$a_{n+3}=6a_{n+2}+a_{n+1}$，

$$\begin{aligned}a_{n+4}&=6a_{n+3}+a_{n+2}=6(6a_{n+2}+a_{n+1})+a_{n+2}\\&=37a_{n+2}+6a_{n+1}\end{aligned}$$

$a_{n+2}=6a_{n+1}+a_n$ より，$6a_{n+1}=a_{n+2}-a_n$ であるから

$$\begin{aligned}a_{n+4}&=37a_{n+2}+(a_{n+2}-a_n)\\&=38a_{n+2}-a_n\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a_{n+4}=38a_{n+2}-a_n}$

(iii) (1)(ii) を $a_{n+4}=38a_{n+2}+(-a_n)$ に適用すると

$$(a_n+4,\ a_{n+2})=(a_{n+2},-a_n)=(a_{n+2},\ a_n)$$

$a_3=6a_2+a_1=6{\cdot}4+3=27$，$a_4=6a_3+a_2=6{\cdot}27+4=166$

(ii) の結果により

n が奇数のとき　$(a_{n+2},a_n)=(a_3,a_1)=(27,3)=\mathbf{3}$

n が偶数のとき　$(a_{n+2},a_n)=(a_4,a_2)=(166,4)=\mathbf{2}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $r = 1 + \cos\theta$ より

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = (1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

これらを θ について微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -\sin\theta\cos\theta + (1+\cos\theta)(-\sin\theta) \\ &= -\sin\theta(1+2\cos\theta), \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\sin\theta\sin\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= -(1-\cos^2\theta) + (1+\cos\theta)\cos\theta \\ &= (1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta) \end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{dx}{d\theta} = 0\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の解は　$\theta = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　$\mathbf{(2,\ 0),\ (0,\ 0),\left(-\frac{1}{4},\ \pm\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}$

また，$\dfrac{dy}{d\theta} = 0\ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の解は　$\theta = \pi,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，これらの点の座標は　$\mathbf{(0,\ 0),\left(\frac{3}{4},\ \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$

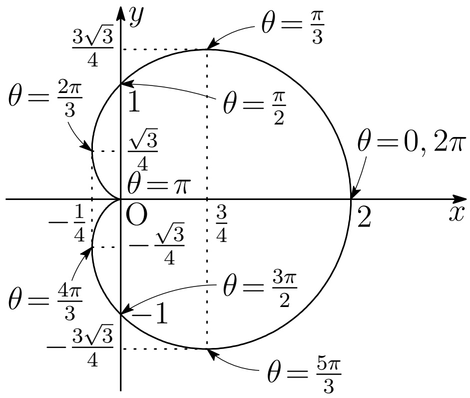
(2) $$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} &= \frac{(1+\cos\theta)(-1+2\cos\theta)}{-\sin\theta(1+2\cos\theta)} \\ &= \frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta} \\ &= \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta} \end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx} = \lim_{\theta\to\pi}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1-2\cos\theta}{1+2\cos\theta} = \frac{0}{1+1}\cdot\frac{1+2}{1-2} = \mathbf{0}$

(3) $f(\theta)=1+\cos\theta$ とすると，$f(2\pi-\theta)=r(\theta)$．C は x 軸に関して対称であるから，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における C の増減を調べる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
x	2	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
$\frac{dy}{d\theta}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

上の増減表および (2) の結果から，C の概形は次のようになる．



(4) $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta$$

ゆえに $$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

$r=1+\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned} r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= (1+\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2 \\ &= 2(1+\cos\theta)=4\cos^2\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

よって，曲線 C の長さを l とすると

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= \int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=\Big[\,4\sin\frac{\theta}{2}\,\Big]_0^{\pi}=4 \end{aligned}$$

よって $\quad l=\mathbf{8}$

補足 曲線 $r=a(1+\cos\theta)$ は，カージオイド (cardioid) または心臓形という．

解説

C の x 軸の上側の部分と x 軸で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{1}{4}}^{2} y\,dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} y\,dx \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_{0}^{\pi} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(r^2)'\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\,r^2\sin\theta\cos\theta\,\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\Big[\,\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin\theta\,\Big]_0^{\pi} = \frac{3}{4}\pi
\end{aligned}$$

C の x 軸の上側の部分を x 軸のまわりに 1 回転した回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_{-\frac{1}{4}}^{2} y^2\,dx - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} y^2\,dx \\
&= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\int_{0}^{\pi} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\int_{0}^{\pi}(r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{3}\Big[\,r^3\sin^2\theta\cos\theta\,\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\pi} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi}(1+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\Big[\,-\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4\,\Big]_0^{\pi} = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

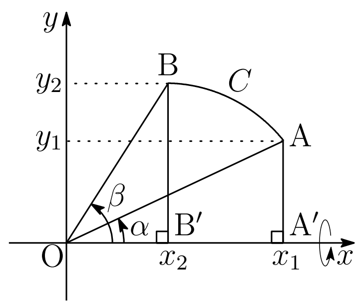
よって　　$V = \dfrac{8}{3}\pi$

曲線 $r = f(\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の弧長 l，x 軸と囲まれた部分の面積 S，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$l = \int_0^{\pi}\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta, \quad S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\,d\theta, \quad V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi} r^3\sin\theta\,d\theta$$

極方程式と面積

$C : r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ とし，C 上の $\theta = \alpha,\ \beta$ に対応する点を，それぞれ A，B とし，A，B から x 軸に垂線 AA′，BB′ を引く．$S_A = \triangle \mathrm{OAA'}$，$S_B = \triangle \mathrm{OBB'}$ とし，曲線 C，x 軸，2 直線 AA′，BB′ で囲まれた領域 D_C の面積を S_C，曲線 C，2 直線 OA，OB で囲まれた領域 D の面積を S とすると



$$
\begin{aligned}
S_C &= \int_{x_2}^{x_1} y\,dx = \int_{\beta}^{\alpha} r\sin\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(r^2)'\sin\theta\cos\theta\,d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -\frac{1}{2}\Big[\ r^2\sin\theta\cos\theta\ \Big]_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} r^2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -S_B + S_A + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$S = S_C + S_B - S_A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta$

極方程式と $\boldsymbol{x}$ 軸の周りの回転体の体積

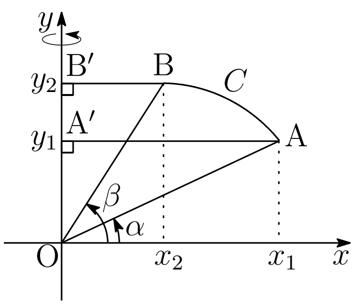
次に $\triangle \mathrm{OAA'}$，$\triangle \mathrm{OBB'}$ を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_A，V_B とし，また，領域 D_C，D を x 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_C，V とすると

$$
\begin{aligned}
V_C &= \pi\int_{x_2}^{x_1} y^2\,dx = \pi\int_{\beta}^{\alpha} r^2\sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}(r^3)'\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -\frac{\pi}{3}\Big[\ r^3\sin^2\theta\cos\theta\ \Big]_{\alpha}^{\beta} + \frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin^3\theta\,d\theta \\
&= -V_B + V_A + \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$V = V_C + V_B - V_A = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta$

極方程式と $\boldsymbol{y}$ 軸の周りの回転体の体積

$C : r = f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ とし，C 上の $\theta = \alpha,\ \beta$ に対応する点を，それぞれ A，B とし，A，B から y 軸に垂線 AA′，BB′ を引く．曲線 C，y 軸，2 直線 AA′，BB′ で囲まれた領域を D_C とし，曲線 C，2 直線 OA，OB で囲まれた領域を D とする．△OAA′，△OBB′ を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_A，V_B とし，また，領域 D_C，D を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積をそれぞれ，V_C，V とすると



$$
\begin{aligned}
V_C &= \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy = \pi \int_{\alpha}^{\beta} r^2\cos^2\theta(r'\sin\theta + r\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} (r^3)'\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos^3\theta\,d\theta \\
&= \frac{\pi}{3}\Big[\,r^3\cos^2\theta\sin\theta\,\Big]_{\alpha}^{\beta} - \frac{\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3(-2\cos\theta\sin^2\theta + \cos^3\theta)d\theta + \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos^3\theta\,d\theta \\
&= V_B - V_A + \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos\theta\,d\theta
\end{aligned}
$$

よって　　$V = V_C + V_A - V_B = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos\theta\,d\theta$

極方程式の計量

- 弧長 l　　$\boldsymbol{l = \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta}$
- 面積 S　　$\boldsymbol{S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\theta}$
- x 軸の周りの回転体の体積 V

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\sin\theta\,d\theta \quad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi)}$$

- y 軸の周りの回転体の体積 V

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^3\cos\theta\,d\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}\right)}$$