平成 27 年度　神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
発達科学 (人間環境 (理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 座標平面上の 2 つの曲線 $y = \dfrac{x-3}{x-4}$，$y = \dfrac{1}{4}(x-1)(x-3)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする．以下の問に答えよ．

(1) 2 曲線 C_1，C_2 の交点をすべて求めよ．

(2) 2 曲線 C_1，C_2 の概形をかき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ．

2 座標平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を C とする．$a > 2$，$0 < \theta < \pi$ とし，x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ と楕円 C 上の点 $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる．原点を O とし，直線 AP と y 軸との交点を Q とする．点 Q を通り x 軸に平行な直線と，直線 OP との交点を R とする．以下の問に答えよ．

(1) 点 R の座標を求めよ．

(2) (1) で求めた点 R の y 座標を $f(\theta)$ とする．このとき，$0 < \theta < \pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めよ．

(3) 原点 O と点 R の距離の 2 乗を $g(\theta)$ とする．このとき，$0 < \theta < \pi$ における $g(\theta)$ の最小値を求めよ．

3 a を正の実数とする．座標平面上の曲線 C を

$$y = x^4 - 2(a+1)x^3 + 3ax^2$$

で定める．曲線 C が 2 つの変曲点 P，Q をもち，それらの x 座標の差が $\sqrt{2}$ であるとする．以下の問に答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 線分 PQ の中点と x 座標が一致するような，C 上の点を R とする．三角形 PQR の面積を求めよ．

(3) 曲線 C 上の点 P における接線が P 以外で C と交わる点を P′ とし，点 Q における接線が Q 以外で C と交わる点を Q′ とする．線分 P′Q′ の中点の x 座標を求めよ．

4 a，b を実数とし，自然数 k に対して $x_k = \dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $x_k = \dfrac{p}{k} + \dfrac{q}{k+1} + \dfrac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p，q，r を，a，b を用いて表せ．

(2) $b=0$ のとき，3 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．また，$a=0$ のとき，4 以上の自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ．

5 a，b，c を 1 以上 7 以下の自然数とする．次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ 3 辺の長さが a，b，c である三角形と，3 辺の長さが $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する．

以下の問に答えよ．

(1) $a=b>c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

(2) $a>b>c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

(3) 条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

解答例

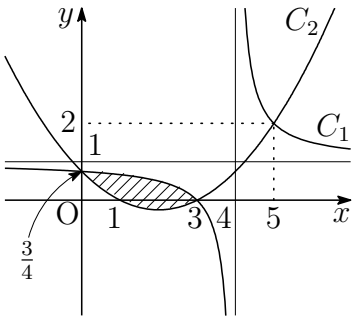
1 (1) $C_1 : y = \dfrac{x-3}{x-4}$，$C_2 : y = \dfrac{1}{4}(x-1)(x-3)$

C_1，C_2 の方程式から y を消去すると

$$\frac{1}{4}(x-1)(x-3) = \frac{x-3}{x-4}$$

$$\frac{x-3}{4(x-4)}\{(x-1)(x-4)-4\} = 0$$

$$\frac{x(x-3)(x-5)}{4(x-4)} = 0$$



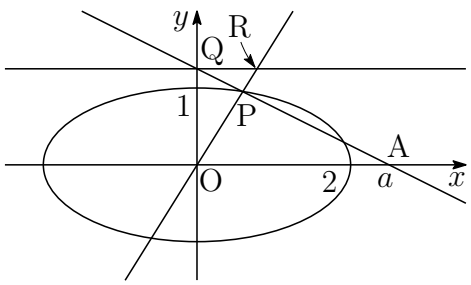
ゆえに　$x = 0,\ 3,\ 5$　よって，求める交点は　$\left(\mathbf{0},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)$，$\mathbf{(3,\ 0)}$，$\mathbf{(5,\ 2)}$

(2) 求める面積を S とすると，上の図から

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left\{\frac{x-3}{x-4} - \frac{1}{4}(x-1)(x-3)\right\} dx \\ &= \int_0^3 \left\{1 + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{4}(x^2-4x+3)\right\} dx \\ &= \left[x + \log|x-4| - \frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right)\right]_0^3 \\ &= 3 - \log 4 - \frac{1}{4}(9-18+9) = \mathbf{3 - 2\log 2} \end{aligned}$$

■

2 (1) 2 点 A$(a,\ 0)$，P$(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通る直線方程式は $(a>2)$



$$y=\frac{-\sin\theta}{a-2\cos\theta}(x-a)$$

ゆえに　$\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)$

直線 OP の方程式は　　$x\sin\theta-2y\cos\theta=0$

$y=\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}$ を上式に代入すると $(0<\theta<\pi)$

$$x\sin\theta-2\cdot\frac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\cdot\cos\theta=0$$

$0<\theta<\pi$ より，$\sin\theta\neq0$ であるから　$x=\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta}$

よって　　$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{\dfrac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta},\ \dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}}\right)$

(2) (1) の結果より，$f(\theta)=\dfrac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}$ であるから

$$f'(\theta)=a\cdot\frac{\cos\theta\cdot(a-2\cos\theta)-\sin\theta\cdot2\sin\theta}{(a-2\cos\theta)^2}=\frac{a(a\cos\theta-2)}{(a-2\cos\theta)^2}$$

$a>2$ より，$f'(\theta)=0$ を満たす θ $(0<\theta<\pi)$ がただ 1 つ存在し，これを α とすると

$$\cos\alpha=\frac{2}{a},\quad \sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$$

したがって，$f(\theta)$ の増減表は

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	(π)
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって，求める $f(\theta)$ の最大値は

$$f(\alpha)=\frac{a\sin\alpha}{a-2\cos\alpha}=\frac{a\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}}{a-2\cdot\dfrac{2}{a}}=\frac{a\sqrt{a^2-4}}{a^2-4}=\boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{a^2-4}}}$$

(3) (1) の結果より，$g(\theta)=\mathrm{OR}^2$ であるから

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \left(\frac{2a\cos\theta}{a-2\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{a\sin\theta}{a-2\cos\theta}\right)^2 \\ &= \frac{4a^2\cos^2\theta+a^2(1-\cos^2\theta)}{(a-2\cos\theta)^2}=\frac{a^2(1+3\cos^2\theta)}{(a-2\cos\theta)^2} \end{aligned}$$

$0<\theta<\pi$ であるから

$$h(t)=a^2(3t^2+1)(a-2t)^{-2} \quad (-1<t<1)$$

とおくと，$h(t)$ の最小値は，$g(\theta)$ の最小値と一致するから

$$\begin{aligned} h'(t) &= a^2\{6t(a-2t)^{-2}+(3t^2+1)\cdot 4(a-2t)^{-3}\} \\ &= 2a^2\{3t(a-2t)+2(3t^2+1)\}(a-2t)^{-3} \\ &= 2a^2(3at+2)(a-2t)^{-3} \end{aligned}$$

$a>2$ より，$-\dfrac{1}{3}<-\dfrac{2}{3a}<0$ であるから，$h(t)$ の増減表は

t	(-1)	$\cdots$	$-\frac{2}{3a}$	$\cdots$	(1)
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，求める最小値は

$$\begin{aligned} h\left(-\frac{2}{3a}\right) &= a^2\left\{3\left(-\frac{2}{3a}\right)^2+1\right\}\left\{a-2\cdot\left(-\frac{2}{3a}\right)\right\}^{-2} \\ &= a^2\cdot\frac{4+3a^2}{3a^2}\cdot\left(\frac{3a^2+4}{3a}\right)^{-2} \\ &= \frac{3a^2+4}{3}\cdot\frac{9a^2}{(3a^2+4)^2}=\boldsymbol{\frac{3a^2}{3a^2+4}} \end{aligned}$$

■

3 (1) $f(x) = x^4 - 2(a+1)x^3 + 3ax^2$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 6(a+1)x^2 + 6ax, \\ f''(x) &= 12x^2 - 12(a+1)x + 6a \\ &= 6\{2x^2 - 2(a+1)x + a\} \end{aligned}$$

$\dfrac{f''(x)}{6} = 0$ の係数について

$$D/4 = (a+1)^2 - 2a = a^2 + 1 > 0$$

したがって，$f''(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつ．この 2 つの実数解を α，β とすると $(\alpha < \beta)$

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

C 上の 2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化するので，これらの 2 点は C の変曲点である．また，$f''(x) = 0$ を解くと

$$\alpha = \frac{a+1-\sqrt{a^2+1}}{2}, \quad \beta = \frac{a+2+\sqrt{a^2+1}}{2}$$

上式より，$\beta - \alpha = \sqrt{a^2+1}$．条件より，$\beta - \alpha = \sqrt{2}$ であるから

$$\sqrt{a^2+1} = \sqrt{2}$$

$a > 0$ であるから　　$\boldsymbol{a = 1}$

注意 $f'(a) = 0$ は $f(a)$ が極値であるための必要条件であるが，十分条件ではないように，$f''(a) = 0$ は点 $(a,\ f(a))$ が変曲点であるための必要条件ではあるが，十分条件ではない．必ず，$x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化していることを示す必要がある．なお，$f''(x)$ の符号は曲率 [1] の符号を表す．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf の p.10 を参照．

(2) (1) の結果より　$f(x)=x^4-4x^3+3x^2$，$f''(x)=6(2x^2-4x+1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2-4x+1)\left(\frac{x^2}{2}-x-\frac{3}{4}\right)-2x+\frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{6}f''(x)\left(\frac{x^2}{2}-x-\frac{3}{4}\right)-2x+\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$\mathrm{P}\left(\alpha, -2\alpha+\frac{3}{4}\right)$，$\mathrm{Q}\left(\beta, -2\beta+\frac{3}{4}\right)$ とおく．

$$\alpha=\frac{2-\sqrt{2}}{2},\quad \beta=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\quad \text{ゆえに}\quad \frac{\alpha+\beta}{2}=1\quad \cdots(*)$$

$f(1)=0$ より，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(\alpha-1, -2\alpha+\frac{3}{4}\right),\quad \overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\left(\beta-1, -2\beta+\frac{3}{4}\right)$$

$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left|(\alpha-1)\left(-2\beta+\frac{3}{4}\right)-(\beta-1)\left(-2\alpha+\frac{3}{4}\right)\right| \\ &= \frac{5}{8}|\beta-\alpha| = \boldsymbol{\frac{5}{8}\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(3) $f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\dfrac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2+\dfrac{f'''(\alpha)}{3!}(x-\alpha)^3+(x-\alpha)^4$

曲線 $C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線の方程式は

$$y=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)\quad \cdots ①$$

$f''(\alpha)=0$，$f'''(x)=24(x-1)$ より $f'''(\alpha)=24(\alpha-1)$ に注意して，$y=f(x)$ と ① から y を消去すると

$$\begin{aligned} 4(\alpha-1)(x-\alpha)^3+(x-\alpha)^4 &= 0 \\ (x-\alpha)^3(x+3\alpha-4) &= 0 \end{aligned}$$

したがって，P' の x 座標は　$-3\alpha+4$

同様にして，Q' の x 座標は　$-3\beta+4$

よって，線分 $\mathrm{P'Q'}$ の中点の x 座標は，$(*)$ に注意して

$$-3\cdot\frac{\alpha+\beta}{2}+4=-3\cdot 1+4=\mathbf{1}$$

解説

関数 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$ について，$f^{(4)}(x) = 4!$ であるから

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(p) + \int_p^x f'(t)\,dt = f(p) - \int_p^x (x-t)' f'(t)\,dt \\
&= f(p) - \Big[\ (x-t)f'(t)\ \Big]_p^x + \int_p^x (x-t)f''(t)\,dt \\
&= f(p) + (x-p)f'(p) - \frac{1}{2!}\int_p^x \{(x-t)^2\}' f''(t)\,dt \\
&= f(p) + (x-p)f'(p) - \frac{1}{2!}\Big[(x-t)^2 f''(t)\Big]_p^x + \frac{1}{2!}\int_p^x (x-t)^2 f'''(t)\,dt \\
&= f(p) + (x-p)f'(p) + \frac{1}{2!}(x-p)^2 f''(p) - \frac{1}{3!}\int_p^x \{(x-t)^3\}' f'''(t)\,dt \\
&= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 - \frac{1}{3!}\Big[(x-t)^3 f'''(t)\Big]_p^x \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{3!}\int_p^x (x-t)^3 f^{(4)}(t)\,dt \\
&= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}(x-p)^3 + 4\int_p^x (x-t)^3\,dt \\
&= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}(x-p)^3 - \Big[(x-t)^4\Big]_p^x \\
&= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!}(x-p)^3 + (x-p)^4
\end{aligned}
$$

一般に，n 次関数 $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ について $(n \geqq 2)$

$$
g(x) = g(p) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(p)}{k!}(x-p)^k + a_n (x-p)^n
$$

が成り立つ． ■

$\boxed{4}$ (1) $x_k = \dfrac{p}{k} + \dfrac{q}{k+1} + \dfrac{r}{k+3} = \dfrac{(p+q+r)k^2 + (4p+3q+r)k + 3p}{k(k+1)(k+3)}$

$x_k = \dfrac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)}$ であるから

$$p+q+r=0, \quad 4p+3q+r=2a, \quad 3p=6b$$

よって　$\boldsymbol{p=2b,\ \ q=a-3b,\ \ r=-a+b}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k &= 2b\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) + (a-b)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\\ &= 2b\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + (a-b)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

(上式は，$n=1,2$ のときも成立する)

$(*)$ より，$b=0$ のとき $(n \geqq 3)$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = a\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) = \boldsymbol{\frac{an(5n+13)}{6(n+2)(n+3)}}$$

$(*)$ より，$a=0$ のとき $(n \geqq 4)$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} x_k &= 2b\left(1-\frac{1}{n+1}\right) - b\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\\ &= b\left(\frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)\\ &= \boldsymbol{\frac{bn(7n^2+42n+59)}{6(n+1)(n+2)(n+3)}}\end{aligned}$$

(上式は，$n=1,2,3$ のときも成立する)

(3) $(*)$ より　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k = 2b\cdot 1 + (a-b)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{5}{6}a + \frac{7}{6}b}$

■

5 (1) a，b，c は1以上7以下の自然数であるから，$a=b>c$ のとき　$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき　　$b+c>a$　かつ　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

このとき，$a=b>c$ であるから　$\dfrac{2}{b}>\dfrac{1}{c}$　すなわち　$2c>b>c$

ゆえに　$c=1$ のとき　$2>b>1$ より　なし
$c=2$ のとき　$4>b>2$ より　$a=b=3$
$c=3$ のとき　$6>b>3$ より　$a=b=4,\ 5$
$c=4$ のとき　$8>b>4$ より　$a=b=5,\ 6,\ 7$
$c=5$ のとき　$10>b>5$ より　$a=b=6,\ 7$
$c=6$ のとき　$12>b>6$ より　$a=b=7$
$c=7$ のとき　$14>b>7$ より　なし

よって，求める組の個数は　$1+2+3+2+1=\mathbf{9}$ (個)

(2) a，b，c は1以上7以下の自然数であるから，$a>b>c$ のとき　$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき　　$b+c>a$　かつ　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

ゆえに　　$a-b<c$　かつ　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

このとき，$a>b>c$ であるから　$1\leqq c\leqq 5$

(i) $a>b>c=1$ のとき　$a-b<1,\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>1$

これをみたす $(a,\ b)$ の組はなし

(ii) $a>b>c=2$ のとき　$a-b<2,\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{2}$

よって，$(a,\ b)=(4,\ 3)$ の1個

(iii) $a>b>c=3$ のとき　$a-b<3,\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{3}$

よって，$(a,\ b)=(5,\ 4),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (7,\ 5)$ の4個

(iv) $a>b>c=4$ のとき　$a-b<4,\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{4}$

よって，$(a,\ b)=(6,\ 5),\ (7,\ 5),\ (7,\ 6)$ の3個

(v) $a>b>c=5$ のとき　$a-b<5,\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{5}$

よって，$(a,\ b)=(7,\ 6)$ の1個

したがって，求める組の個数は　$1+4+3+1=\mathbf{9}$　(個)

(3) a，b，c は 1 以上 7 以下の自然数であるから，$a > b = c$ のとき　$\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき　　$b + c > a$　かつ　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$

このとき，$a > b = c$ であるから　$c + c > a$　すなわち　$2c > a > c$

これは (1) の個数に等しいから　9 (個)

また，$a = b = c$ となる個数は 7 個であるから，以上をまとめると

- $a = b > c$ の場合が 9 個であるから，
  $b = c > a$，$c = a > b$ の場合もそれぞれ 9 個
- $a > b = c$ の場合が 9 個であるから，
  $b > c = a$，$c > a = b$ の場合もそれぞれ 9 個
- $a > b > c$ の場合が 9 個であるから，
  $$a > c > b,\ b > a > c,\ b > a > c,\ c > a > b,\ c > b > a$$
  の場合もそれぞれ 9 個
- $a = b = c$ の場合が 7 個

よって，条件 $(*)$ をみたす a，b，c の個数は

$$9 \times 3 + 9 \times 3 + 9 \times 6 + 7 = \mathbf{115}\ \text{(個)}$$

■