

平成27年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・
発達科学(人間環境(理科系))・海事科学

1 座標平面上の2つの曲線 $y = \frac{x-3}{x-4}$, $y = \frac{1}{4}(x-1)(x-3)$ をそれぞれ C_1 , C_2 とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 2曲線 C_1 , C_2 の交点をすべて求めよ.
- (2) 2曲線 C_1 , C_2 の概形をかき, C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ.

2 座標平面上の楕円 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を C とする. $a > 2$, $0 < \theta < \pi$ とし, x 軸上の点 $A(a, 0)$ と楕円 C 上の点 $P(2\cos\theta, \sin\theta)$ をとる. 原点を O とし, 直線 AP と y 軸との交点を Q とする. 点 Q を通り x 軸に平行な直線と, 直線 OP との交点を R とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 点 R の座標を求めよ.
- (2) (1) で求めた点 R の y 座標を $f(\theta)$ とする. このとき, $0 < \theta < \pi$ における $f(\theta)$ の最大値を求めよ.
- (3) 原点 O と点 R の距離の2乗を $g(\theta)$ とする. このとき, $0 < \theta < \pi$ における $g(\theta)$ の最小値を求めよ.

3 a を正の実数とする. 座標平面上の曲線 C を

$$y = x^4 - 2(a+1)x^3 + 3ax^2$$

で定める. 曲線 C が2つの変曲点 P , Q をもち, それらの x 座標の差が $\sqrt{2}$ であるとする. 以下の問に答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) 線分 PQ の中点と x 座標が一致するような, C 上の点を R とする. 三角形 PQR の面積を求めよ.
- (3) 曲線 C 上の点 P における接線が P 以外で C と交わる点を P' とし, 点 Q における接線が Q 以外で C と交わる点を Q' とする. 線分 $P'Q'$ の中点の x 座標を求めよ.

4 a, b を実数とし、自然数 k に対して $x_k = \frac{2ak + 6b}{k(k+1)(k+3)}$ とする。以下の間に答えよ。

(1) $x_k = \frac{p}{k} + \frac{q}{k+1} + \frac{r}{k+3}$ がすべての自然数 k について成り立つような実数 p, q, r を、 a, b を用いて表せ。

(2) $b = 0$ のとき、3 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^n x_k$ を求めよ。また、 $a = 0$ のとき、4 以上の自然数 n に対して $\sum_{k=1}^n x_k$ を求めよ。

(3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ の和を求めよ。

5 a, b, c を 1 以上 7 以下の自然数とする。次の条件 (*) を考える。

(*) 3 辺の長さが a, b, c である三角形と、3 辺の長さが $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する。

以下の間に答えよ。

(1) $a = b > c$ であり、かつ条件 (*) をみたす a, b, c の組の個数を求めよ。

(2) $a > b > c$ であり、かつ条件 (*) をみたす a, b, c の組の個数を求めよ。

(3) 条件 (*) をみたす a, b, c の組の個数を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad C_1: y = \frac{x-3}{x-4}, \quad C_2: y = \frac{1}{4}(x-1)(x-3)$$

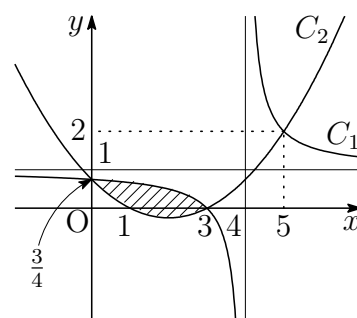
C_1, C_2 の方程式から y を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(x-1)(x-3) &= \frac{x-3}{x-4} \\ \frac{x-3}{4(x-4)} \{(x-1)(x-4) - 4\} &= 0 \\ \frac{x(x-3)(x-5)}{4(x-4)} &= 0 \end{aligned}$$

ゆえに $x = 0, 3, 5$ よって、求める交点は $\left(0, \frac{3}{4}\right), (3, 0), (5, 2)$

(2) 求める面積を S とすると、上の図から

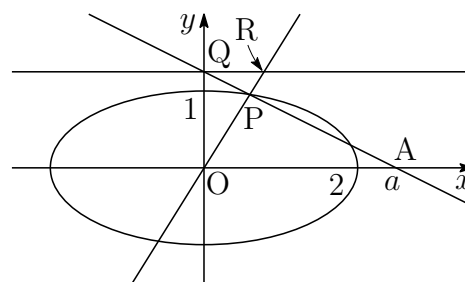
$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \left\{ \frac{x-3}{x-4} - \frac{1}{4}(x-1)(x-3) \right\} dx \\ &= \int_0^3 \left\{ 1 + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) \right\} dx \\ &= \left[x + \log|x-4| - \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right) \right]_0^3 \\ &= 3 - \log 4 - \frac{1}{4}(9 - 18 + 9) = \mathbf{3 - 2 \log 2} \end{aligned}$$



- 2 (1) 2点 $A(a, 0)$, $P(2 \cos \theta, \sin \theta)$ を通る直線方程式は ($a > 2$)

$$y = \frac{-\sin \theta}{a - 2 \cos \theta}(x - a)$$

ゆえに $Q\left(0, \frac{a \sin \theta}{a - 2 \cos \theta}\right)$



直線 OP の方程式は $x \sin \theta - 2y \cos \theta = 0$

これに $y = \frac{a \sin \theta}{a - 2 \cos \theta}$ を代入すると ($0 < \theta < \pi$)

$$x \sin \theta - 2 \cdot \frac{a \sin \theta}{a - 2 \cos \theta} \cdot \cos \theta = 0$$

$0 < \theta < \pi$ より, $\sin \theta \neq 0$ であるから $x = \frac{2a \cos \theta}{a - 2 \cos \theta}$

よって $R\left(\frac{2a \cos \theta}{a - 2 \cos \theta}, \frac{a \sin \theta}{a - 2 \cos \theta}\right)$

- (2) (1) の結果より, $f(\theta) = \frac{a \sin \theta}{a - 2 \cos \theta}$ であるから

$$f'(\theta) = a \cdot \frac{\cos \theta \cdot (a - 2 \cos \theta) - \sin \theta \cdot 2 \sin \theta}{(a - 2 \cos \theta)^2} = \frac{a(a \cos \theta - 2)}{(a - 2 \cos \theta)^2}$$

$a > 2$ より, $f'(\theta) = 0$ を満たす θ ($0 < \theta < \pi$) がただ 1 つ存在し, これを α とすると

$$\cos \alpha = \frac{2}{a}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a}$$

したがって, $f(\theta)$ の増減表は

θ	(0)	...	α	...	(π)
$f'(\theta)$		+	0	-	
(θ)		↗	極大	↘	

よって, 求める $f(\theta)$ の最大値は

$$f(\alpha) = \frac{a \sin \alpha}{a - 2 \cos \alpha} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{a^2 - 4}}{a}}{a - 2 \cdot \frac{2}{a}} = \frac{a \sqrt{a^2 - 4}}{a^2 - 4} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - 4}}$$

(3) (1)の結果より, $g(\theta) = OR^2$ であるから

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \left(\frac{2a \cos \theta}{a - 2 \cos \theta} \right)^2 + \left(\frac{a \sin \theta}{a - 2 \cos \theta} \right)^2 \\ &= \frac{4a^2 \cos^2 \theta + a^2(1 - \cos^2 \theta)}{(a - 2 \cos \theta)^2} = \frac{a^2(1 + 3 \cos^2 \theta)}{(a - 2 \cos \theta)^2} \end{aligned}$$

$0 < \theta < \pi$ であるから

$$h(t) = a^2(3t^2 + 1)(a - 2t)^{-2} \quad (-1 < t < 1)$$

とおくと, $h(t)$ の最小値は, $g(\theta)$ の最小値と一致するから

$$\begin{aligned} h'(t) &= a^2\{6t(a - 2t)^{-2} + (3t^2 + 1) \cdot 4(a - 2t)^{-3}\} \\ &= 2a^2\{3t(a - 2t) + 2(3t^2 + 1)\}(a - 2t)^{-3} \\ &= 2a^2(3at + 2)(a - 2t)^{-3} \end{aligned}$$

$a > 2$ より, $-\frac{1}{3} < -\frac{2}{3a} < 0$ であるから, $h(t)$ の増減表は

t	(-1)	\dots	$-\frac{2}{3a}$	\dots	(1)
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		\searrow	極小	\nearrow	

よって, 求める最小値は

$$\begin{aligned} h\left(-\frac{2}{3a}\right) &= a^2 \left\{ 3 \left(-\frac{2}{3a}\right)^2 + 1 \right\} \left\{ a - 2 \cdot \left(-\frac{2}{3a}\right) \right\}^{-2} \\ &= a^2 \cdot \frac{4 + 3a^2}{3a^2} \cdot \left(\frac{3a^2 + 4}{3a}\right)^{-2} \\ &= \frac{3a^2 + 4}{3} \cdot \frac{9a^2}{(3a^2 + 4)^2} = \frac{3a^2}{3a^2 + 4} \end{aligned}$$

3 (1) $f(x) = x^4 - 2(a+1)x^3 + 3ax^2$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 6(a+1)x^2 + 6ax, \\ f''(x) &= 12x^2 - 12(a+1)x + 6a \\ &= 6\{2x^2 - 2(a+1)x + a\} \end{aligned}$$

$f''(x) = 0$ の係数について

$$D/4 = (a+1)^2 - 2a = a^2 + 1 > 0$$

したがって、 $f''(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。この 2 つの実数解を α , β とすると ($\alpha < \beta$)

x	\cdots	α	\cdots	β	\cdots
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

C 上の 2 点 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化するので、これらの 2 点は C の変曲点である。また、 $f''(x) = 0$ を解くと

$$\alpha = \frac{a+1 - \sqrt{a^2+1}}{2}, \quad \beta = \frac{a+2 + \sqrt{a^2+1}}{2}$$

上式より、 $\beta - \alpha = \sqrt{a^2+1}$ 。条件より、 $\beta - \alpha = \sqrt{2}$ であるから

$$\sqrt{a^2+1} = \sqrt{2}$$

$a > 0$ であるから $\mathbf{a = 1}$

注意 $f'(a) = 0$ は $f(a)$ が極値であるための必要条件であるが、十分条件ではないように、 $f''(a) = 0$ は点 $(a, f(a))$ が変曲点であるための必要条件ではあるが、十分条件ではない。必ず、 $x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化していることを示す必要がある。なお、 $f''(x)$ の符号は曲率¹の符号を表す。

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf の p.10 を参照。

(2) (1) の結果より $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$, $f''(x) = 6(2x^2 - 4x + 1)$

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x^2 - 4x + 1) \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{4} \right) - 2x + \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{6} f''(x) \left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{4} \right) - 2x + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$P\left(\alpha, -2\alpha + \frac{3}{4}\right)$, $Q\left(\beta, -2\beta + \frac{3}{4}\right)$ とおく.

$$\alpha = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \quad \beta = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = 1 \quad \dots (*)$$

$f(1) = 0$ より, $R(1, 0)$ であるから

$$\overrightarrow{RP} = \left(\alpha - 1, -2\alpha + \frac{3}{4} \right), \quad \overrightarrow{RQ} = \left(\beta - 1, -2\beta + \frac{3}{4} \right)$$

$\triangle PQR$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| (\alpha - 1) \left(-2\beta + \frac{3}{4} \right) - (\beta - 1) \left(-2\alpha + \frac{3}{4} \right) \right| \\ &= \frac{5}{8} |\beta - \alpha| = \frac{5}{8} \sqrt{2} \end{aligned}$$

(3) $f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x - \alpha)^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(x - \alpha)^3 + (x - \alpha)^4$

曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(\alpha, f(\alpha))$ における接線の方程式は

$$y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \quad \dots \textcircled{1}$$

$f''(\alpha) = 0$, $f'''(x) = 24(x - 1)$ より $f'''(\alpha) = 24(\alpha - 1)$ に注意して,
 $y = f(x)$ と $\textcircled{1}$ から y を消去すると

$$\begin{aligned} 4(\alpha - 1)(x - \alpha)^3 + (x - \alpha)^4 &= 0 \\ (x - \alpha)^3(x + 3\alpha - 4) &= 0 \end{aligned}$$

したがって, P' の x 座標は $-3\alpha + 4$

同様にして, Q' の x 座標は $-3\beta + 4$

よって, 線分 $P'Q'$ の中点の x 座標は, $(*)$ に注意して

$$-3 \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} + 4 = -3 \cdot 1 + 4 = 1$$

解説

関数 $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$ について, $f^{(4)}(x) = 4!$ であるから

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(p) + \int_p^x f'(t) dt = f(p) - \int_p^x (x-t)' f'(t) dt \\
 &= f(p) - \left[(x-t)f'(t) \right]_p^x + \int_p^x (x-t)f''(t) dt \\
 &= f(p) + (x-p)f'(p) - \frac{1}{2!} \int_p^x \{(x-t)^2\}' f''(t) dt \\
 &= f(p) + (x-p)f'(p) - \frac{1}{2!} \left[(x-t)^2 f''(t) \right]_p^x + \frac{1}{2!} \int_p^x (x-t)^2 f'''(t) dt \\
 &= f(p) + (x-p)f'(p) + \frac{1}{2!} (x-p)^2 f''(p) - \frac{1}{3!} \int_p^x \{(x-t)^3\}' f'''(t) dt \\
 &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!} (x-p)^2 - \frac{1}{3!} \left[(x-t)^3 f'''(t) \right]_p^x \\
 &\quad + \frac{1}{3!} \int_p^x (x-t)^3 f^{(4)}(t) dt \\
 &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!} (x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!} (x-p)^3 + 4 \int_p^x (x-t)^3 dt \\
 &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!} (x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!} (x-p)^3 - \left[(x-t)^4 \right]_p^x \\
 &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!} (x-p)^2 + \frac{f'''(p)}{3!} (x-p)^3 + (x-p)^4
 \end{aligned}$$

一般に, n 次関数 $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ について ($n \geq 2$)

$$g(x) = g(p) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g^{(k)}(p)}{k!} (x-p)^k + a_n(x-p)^n$$

が成り立つ.

$$\boxed{4} \quad (1) \quad x_k = \frac{p}{k} + \frac{q}{k+1} + \frac{r}{k+3} = \frac{(p+q+r)k^2 + (4p+3q+r)k + 3p}{k(k+1)(k+3)}$$

$$x_k = \frac{2ak+6b}{k(k+1)(k+3)} \text{ であるから}$$

$$p+q+r=0, \quad 4p+3q+r=2a, \quad 3p=6b$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{p=2b, \quad q=a-3b, \quad r=-a+b}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= 2b \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + (a-b) \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= 2b \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + (a-b) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \quad \dots (*) \end{aligned}$$

(上式は, $n=1, 2$ のときも成立する)

(*) より, $b=0$ のとき ($n \geq 3$)

$$\sum_{k=1}^n x_k = a \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{\mathbf{an(5n+13)}}{\mathbf{6(n+2)(n+3)}}$$

(*) より, $a=0$ のとき ($n \geq 4$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= 2b \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) - b \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= b \left(\frac{7}{6} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{\mathbf{bn(7n^2+42n+59)}}{\mathbf{6(n+1)(n+2)(n+3)}} \end{aligned}$$

(上式は, $n=1, 2, 3$ のときも成立する)

$$(3) \quad (*) \text{ より} \quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k = 2b \cdot 1 + (a-b) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}\mathbf{a} + \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{6}}\mathbf{b}$$

5 (1) a, b, c は1以上7以下の自然数であるから, $a = b > c$ のとき $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$

条件(*)をみたすとき $b + c > a$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

このとき, $a = b > c$ であるから $\frac{2}{b} > \frac{1}{c}$ すなわち $2c > b > c$

ゆえに $c = 1$ のとき $2 > b > 1$ より なし

$c = 2$ のとき $4 > b > 2$ より $a = b = 3$

$c = 3$ のとき $6 > b > 3$ より $a = b = 4, 5$

$c = 4$ のとき $8 > b > 4$ より $a = b = 5, 6, 7$

$c = 5$ のとき $10 > b > 5$ より $a = b = 6, 7$

$c = 6$ のとき $12 > b > 6$ より $a = b = 7$

$c = 7$ のとき $14 > b > 7$ より なし

よって, 求める組の個数は $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$ (個)

(2) a, b, c は1以上7以下の自然数であるから, $a > b > c$ のとき $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$

条件(*)をみたすとき $b + c > a$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

ゆえに $a - b < c$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

このとき, $a > b > c$ であるから $1 \leq c \leq 5$

(i) $a > b > c = 1$ のとき $a - b < 1, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 1$

これをみたす (a, b) の組はなし

(ii) $a > b > c = 2$ のとき $a - b < 2, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$

よって, $(a, b) = (4, 3)$ の1個

(iii) $a > b > c = 3$ のとき $a - b < 3, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{3}$

よって, $(a, b) = (5, 4), (6, 4), (6, 5), (7, 5)$ の4個

(iv) $a > b > c = 4$ のとき $a - b < 4, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{4}$

よって, $(a, b) = (6, 5), (7, 5), (7, 6)$ の3個

(v) $a > b > c = 5$ のとき $a - b < 5, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{5}$

よって, $(a, b) = (7, 6)$ の1個

したがって, 求める組の個数は $1 + 4 + 3 + 1 = 9$ (個)

(3) a, b, c は1以上7以下の自然数であるから, $a > b = c$ のとき $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

条件(*)をみたすとき $b + c > a$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$

このとき, $a > b = c$ であるから $c + c > a$ すなわち $2c > a > c$

これは(1)の個数に等しいから 9 (個)

また, $a = b = c$ となる個数は7個であるから, 以上をまとめると

- $a = b > c$ の場合が9個であるから,
 $b = c > a, c = a > b$ の場合もそれぞれ9個
- $a > b = c$ の場合が9個であるから,
 $b > c = a, c > a = b$ の場合もそれぞれ9個
- $a > b > c$ の場合が9個であるから,
 $a > c > b, b > a > c, b > a > c, c > a > b, c > b > a$
 の場合もそれぞれ9個
- $a = b = c$ の場合が7個

よって, 条件(*)をみたす a, b, c の個数は

$$9 \times 3 + 9 \times 3 + 9 \times 6 + 7 = 115 \text{ (個)}$$