平成 26 年度　神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
発達科学 (人間環境 (理科系))・海事科学

1 a を実数とし，$f(x) = xe^x - x^2 - ax$ とする．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線の傾きを -1 とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 関数 $y = f(x)$ の極値を求めよ．

(3) b を実数とするとき，2 つの曲線 $y = xe^x$ と $y = x^2 + ax + b$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲での共有点の個数を調べよ．

2 m，n $(m < n)$ を自然数とし

$$a = n^2 - m^2, \quad b = 2mn, \quad c = n^2 + m^2$$

とおく．三辺の長さが a，b，c である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $a^2 + b^2 = c^2$ を示せ．

(2) r を m，n を用いて表せ．

(3) r が素数のときに，S を r を用いて表せ．

(4) r が素数のときに，S が 6 で割り切れることを示せ．

3 空間において，原点 O を通らない平面 α 上に一辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A，B，C，D とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2) $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$ のとき，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

が，平面 α と垂直であることを示せ．

4 n を自然数とする．1 から $2n$ までの番号をつけた $2n$ 枚のカードを袋に入れ，よくかき混ぜて n 枚を取り出し，取り出した n 枚のカードの数字の合計を A，残された n 枚のカードの数字の合計を B とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) n が奇数のとき，A と B が等しくないことを示せ．

(2) n が偶数のとき，A と B の差は偶数であることを示せ．

(3) $n = 4$ のとき，A と B が等しい確率を求めよ．

5 a，b を正の実数とし，xy 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(a,\ b)$ をとる．三角形 OAB を，原点 O を中心に 90° 回転するとき，三角形 OAB が通過してできる図形を D とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) D を xy 平面上に図示せよ．

(2) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(3) $a + b = 1$ のとき，(2) で求めた V の最小値と，そのときの a の値を求めよ．

解答例

1 (1) $f(x)=xe^x-x^2-ax$ より　$f'(x)=(x+1)e^x-2x-a$

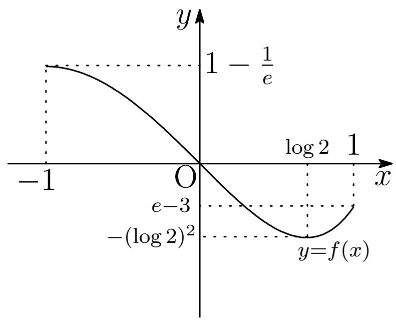
$f'(0)=-1$ であるから　$1-a=-1$　よって　$\boldsymbol{a=2}$

(2) (1) の結果から　$f'(x)=(x+1)e^x-2x-2=(x+1)(e^x-2)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって　極大値 $f(-1)=\boldsymbol{1-\frac{1}{e}}$,　極小値 $f(\log 2)=\boldsymbol{-(\log 2)^2}$

(3) 2 つの曲線 $y=xe^x$ と $y=x^2+2x+b$ の共有点の個数は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=b$ の共有点の個数である．
(2) の結果および $f(1)=e-3$ から，$-1\leqq x\leqq 1$ における $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる．
したがって，求める共有点の個数は



$\boldsymbol{b<-(\log 2)^2,\ 1-\frac{1}{e}<b}$ **のとき**　**0 個**

$\boldsymbol{b=-(\log 2)^2,\ e-3<b\leqq 1-\frac{1}{e}}$ **のとき**　**1 個**

$\boldsymbol{-(\log 2)^2<b\leqq e-3}$ **のとき**　**2 個**

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a=n^2-m^2$，$b=2mn$，$c=n^2+m^2$ より

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(n^2-m^2)^2+(2mn)^2\\&=n^4+2n^2m^2+m^4=(n^2+m^2)^2=c^2\end{aligned}$$

(2) (1) の結果から，斜辺の長さが c の直角三角形であるから，この三角形の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot(n^2-m^2)\cdot 2mn=mn(n+m)(n-m)$$

三角形の内接円の半径が r であるから

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}(a+b+c)r\\&=\frac{1}{2}\{(n^2-m^2)+2mn+(n^2+m^2)\}r\\&=n(n+m)r\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

したがって　$n(n+m)r=mn(n+m)(n-m)$　よって　$\boldsymbol{r=m(n-m)}$

(3) r が素数のとき，(2) の結果から　$m=1$　または　$n-m=1$

(i) $m=1$ のとき，これを (2) の結果に代入すると

$$r=1(n-1)\quad ゆえに\quad n=r+1$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$S=(r+1)\{(r+1)+1\}r=r(r+1)(r+2)$$

(ii) $n-m=1$ のとき，これを (2) の結果に代入すると

$$r=m\cdot 1\quad すなわち\quad m=r,\quad n=r+1$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$S=(r+1)\{(r+1)+r\}r=r(r+1)(2r+1)$$

よって　$\boldsymbol{S=r(r+1)(r+2)}$　または　$\boldsymbol{S=r(r+1)(2r+1)}$

(4) $r(r+1)(r+2)$ は連続する 3 整数の積である．また

$$\begin{aligned}r(r+1)(2r+1)&=r(r+1)\{(r-1)+(r+2)\}\\&=(r-1)r(r+1)+r(r+1)(r+2)\end{aligned}$$

これは連続する 3 整数 (2 の倍数と 3 の倍数を含む) の積の和．
よって，(3) の結果から，r が素数のとき，S は 6 で割り切れる． ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 四角形 ABCD は正方形であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって $$\overrightarrow{\mathbf{OD}} = \overrightarrow{\mathbf{OA}} - \overrightarrow{\mathbf{OB}} + \overrightarrow{\mathbf{OC}}$$

(2) 正方形 ABCD の対角線の交点を G とし

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \vec{g}, \quad \overrightarrow{\mathrm{GA}} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{GB}} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{GC}} = -\vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{GD}} = -\vec{b}$$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{g} + \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{g} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{g} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{g} - \vec{b}$$

$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$ であるから

$$|\vec{g} + \vec{a}|^2 = |\vec{g} + \vec{b}|^2 = |\vec{g} - \vec{a}|^2$$

このとき，$|\vec{a}| = |\vec{b}|$ に注意して，上式を整理すると

$$\vec{g}\cdot\vec{a} = \vec{g}\cdot\vec{b} = -\vec{g}\cdot\vec{a} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{g}\cdot\vec{a} = \vec{g}\cdot\vec{b} = 0$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 4\vec{g}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ と垂直，すなわち，平面 α と垂直である．

別解 (1) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$

したがって
$$\begin{aligned} 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} &= 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \\ &= 2(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2) = 0 \end{aligned}$$

2 点 A，C の中点を M とすると $\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = 4\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

以上より，$\mathrm{OM} \perp \mathrm{MC}$ となる．これから

$$\begin{aligned} &|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{MC}}|^2, \\ &|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}} + |\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{MC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{MB}}|$ であるから $\mathrm{OM} \perp \mathrm{MB}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ は，平面 α と垂直である． ■

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 1 から $2n$ までの $2n$ 枚のカードすべての数字の合計を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2n(2n+1) = n(2n+1)$$

n が奇数のとき，$2n+1$ も奇数であり，この合計は奇数である．
A と B の数字の合計が奇数であるから，A と B は等しくない．

(2) n が偶数のとき，S は偶数で，$A+B=S$ であるから

$$A-B=S-2B$$

上式の右辺は偶数であるから，$A-B$ は偶数である．

(3) $n=4$ のとき，$S=36$
$A=B$ のとき，$S=A+B$ より　$A=B=18$
2 つの集合

$$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\},\quad Q=\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$$

を考える．A の要素は，P，Q からそれぞれ 2 個ずつとったものである．
このとき，P，Q の要素の組み合わせは次のようになる．

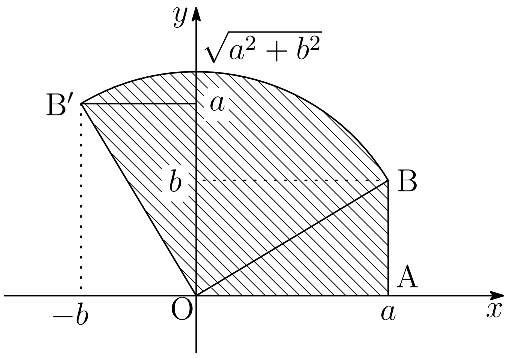
P	Q
$\{1,\ 2\}$	$\{7,\ 8\}$
$\{1,\ 3\}$	$\{6,\ 8\}$
$\{1,\ 4\}$，$\{2,\ 3\}$	$\{5,\ 8\}$，$\{6,\ 7\}$
$\{2,\ 4\}$	$\{5,\ 7\}$
$\{3,\ 4\}$	$\{5,\ 6\}$

よって．求める確率は

$$\frac{1+1+2\cdot 2+1+1}{{}_8\mathrm{C}_4} = \frac{8}{70} = \mathbf{\frac{4}{35}}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) D は下図の斜線部分で境界線を含む.



(2) (1) の図の $\overset{\frown}{\mathrm{BB'}}$ は中心が原点で半径 $\sqrt{a^2+b^2}$ の円

$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

の一部であるから

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-b}^{a} y^2\,dx-\frac{1}{3}\cdot\pi a^2\cdot b \\
&= \pi\int_{-b}^{a}(a^2+b^2-x^2)\,dx-\frac{1}{3}\pi a^2 b \\
&= \pi\left[\ (a^2+b^2)x-\frac{x^3}{3}\ \right]_{-b}^{a}-\frac{1}{3}\pi a^2 b \\
&= \pi\left\{(a^2+b^2)(a+b)-\frac{a^3+b^3}{3}\right\}-\frac{1}{3}\pi a^2 b \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{3}(2a^3+2a^2b+3ab^2+2b^3)}
\end{aligned}$$

別解 $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi=\angle\mathrm{AOB}$ とおくと，$a=r\cos\varphi$，$b=r\sin\varphi$ より [1]

$$\begin{aligned}
V &= \frac{2}{3}\pi r^3\int_{\varphi}^{\varphi+\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta+\frac{1}{3}\cdot\pi b^2\cdot a \\
&= \frac{2}{3}\pi r^3\Big[-\cos\theta\ \Big]_{\varphi}^{\varphi+\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{3}\pi ab^2 \\
&= \frac{2}{3}\pi r^2(r\sin\varphi+r\cos\varphi)+\frac{1}{3}\pi ab^2 \\
&= \frac{2}{3}\pi(a^2+b^2)(b+a)+\frac{1}{3}\pi ab^2=\frac{\pi}{3}(2a^3+2a^2b+3ab^2+2b^3)
\end{aligned}$$

[1]神戸大理系 2016 年 $\boxed{5}$ (p.??の極方程式の計量) を参照

(3) (2) の結果から　　$V=\frac{\pi}{3}\{2(a+b)(a^2+b^2)+ab^2\}$

$a+b=1$ および $b=1-a$ を上式に代入すると

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3}\{2a^2+2(1-a)^2+a(1-a)^2\} \\ &= \frac{\pi}{3}(a^3+2a^2-3a+2) \end{aligned}$$

$a>0$，$b>0$，$a+b=1$ より　$0<a<1$

$$f(a)=a^3+2a^2-3a+2 \quad (0<a<1)$$

とおくと　　　$f'(a)=3a^2+4a-3$

$f'(a)=0$ を解くと　　$a=\dfrac{-2\pm\sqrt{13}}{3}$

$0<a<1$ に注意して，$c=\dfrac{-2+\sqrt{13}}{3}$ とおく．

a	(0)	$\cdots$	c	$\cdots$	(1)
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

ここで　　$f(a)=f'(a)\left(\dfrac{a}{3}+\dfrac{2}{9}\right)-\dfrac{26}{9}a+\dfrac{8}{3}$

$f'(c)=0$ であるから

$$f(c)=-\frac{26}{9}c+\frac{8}{3}=-\frac{26}{9}\cdot\frac{-2+\sqrt{13}}{3}+\frac{8}{3}=\frac{124-26\sqrt{13}}{27}$$

よって，$\boldsymbol{a=\dfrac{-2+\sqrt{13}}{3}}$ のとき，求める最小値は

$$\frac{\pi}{3}\cdot\frac{124-26\sqrt{13}}{27}=\boldsymbol{\frac{124-26\sqrt{13}}{81}\pi}$$

■