平成 25 年度　神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)120 分
理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
発達科学 (人間環境 (理科系))・海事科学

1 空間において，2 点 A(0, 1, 0)，B(−1, 0, 0) を通る直線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 P を ℓ 上に，点 Q を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル (3, 1, −1) と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ．

(2) 点 R を ℓ 上に，点 S を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル (0, 0, 1) の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ．

(3) R，S を (2) で求めた点とする．点 T を ℓ 上に，点 U を z 軸上にとる．また，$\vec{v} = (a,\ b,\ c)$ は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする．$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ．

2 p，r を $-r < p < r$ をみたす実数とする．4 点 P$(p,\ p^2)$，Q$(r,\ p^2)$，R(r, r^2)，S$(p,\ r^2)$ に対し，線分 PR の長さは 1 であるとする．このとき，長方形 PQRS の面積の最大値と，そのときの P，R の x 座標をそれぞれ求めよ．

3 c を $0 < c < 1$ をみたす実数とする．$f(x)$ を 2 次以下の多項式とし，曲線 $y = f(x)$ が 3 点 (0, 0)，$(c,\ c^3 - 2c)$，$(1, -1)$ を通るとする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = x^3 - 2x$ で囲まれた部分の面積 S を c を用いて表せ．

(3) (2) で求めた S を最小にするような c の値を求めよ．

4 a，b を実数とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = a\cos x + b$ が，

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi} \{f(x)\}^3\,dx$$

をみたすとする．このとき，a，b がみたす関係式を求めよ．

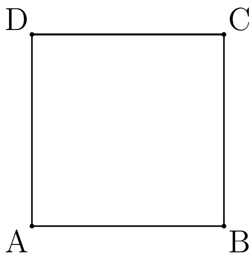
(2) (1) で求めた関係式をみたす正の数 b が存在するための a の条件を求めよ．

5 動点 P が，図のような正方形 ABCD の頂点 A から出発し，さいころをふるごとに，次の規則により正方形のある頂点から他の頂点に移動する．

出た目の数が 2 以下なら辺 AB と平行な方向に移動する．

出た目の数が 3 以上なら辺 AD と平行な方向に移動する．

n を自然数とするとき，さいころを $2n$ 回ふった後に動点 P が A にいる確率を a_n，C にいる確率を c_n とする．次の問いに答えよ．



(1) a_1 を求めよ．

(2) さいころを $2n$ 回ふった後，動点 P は A または C にいることを証明せよ．

(3) a_n，c_n を n を用いてそれぞれ表せ．

(4) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$，$\lim\limits_{n \to \infty} c_n$ をそれぞれ求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) P は直線 AB 上の点であるから，実数 α を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 1,\ 0)+\alpha(-1,-1,\ 0)=(-\alpha,\ 1-\alpha,\ 0)$$

点 Q を $(0,\ 0,\ q)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(0,\ 0,\ q)-(-\alpha,\ 1-\alpha,\ 0)=(\alpha,\ \alpha-1,\ q)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1,-1)$ に平行であるから

$$\frac{\alpha}{3}=\frac{\alpha-1}{1}=\frac{q}{-1}\quad \text{ゆえに}\quad \alpha=\frac{3}{2},\ q=-\frac{1}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\ 0\right)$ であるから　$\mathbf{P}\left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0}\right)$，$\mathbf{Q}\left(\mathbf{0},\ \mathbf{0},-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)$

(2) R は直線 AB 上の点であるから，実数 β を用いて　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(-\beta,\ 1-\beta,\ 0)$

点 S を $(0,\ 0,\ s)$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(\beta,\ \beta-1,\ s)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,-1,\ 0)$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つは

$$(1,-1,\ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ はこのベクトルと平行であるから　$\frac{\beta}{1}=\frac{\beta-1}{-1},\quad s=0$

これを解いて　$\beta=\frac{1}{2}$　ゆえに　$\mathbf{R}\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \mathbf{0}\right)$，$\mathbf{S(0,\ 0,\ 0)}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ 0\right)$ は $\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ に垂直ではないから

$$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\neq 0\quad \text{ゆえに}\quad a-b\neq 0\quad \cdots ①$$

T は直線 AB 上の点であるから，実数 t を用いて　$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(-t,\ 1-t,\ 0)$

点 U を $(0,\ 0,\ u)$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=\overrightarrow{\mathrm{OU}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(t,\ t-1,\ u)$

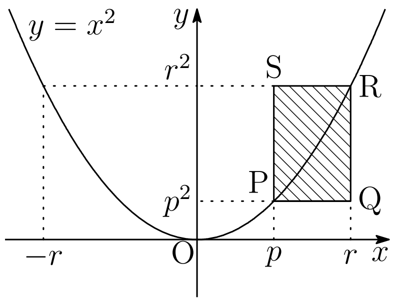
$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ は $\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ に平行であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=k\vec{v}\quad \text{ゆえに}\quad (t,\ t-1,\ u)=k(a,\ b,\ c)$$

したがって　$\begin{cases} t=ka \\ t-1=kb \\ u=kc \end{cases}$　ゆえに　$k(a-b)=1$　① より　$k=\frac{1}{a-b}$

$t=\frac{a}{a-b},\ u=\frac{c}{a-b}$ より　$\mathbf{T}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b-a}},\ \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b-a}},\ \mathbf{0}\right)$，$\mathbf{U}\left(\mathbf{0},\ \mathbf{0},\ \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a-b}}\right)$ ■

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\mathrm{PR}^2=1$ であるから



$$(r-p)^2+(r^2-p^2)^2=1$$
$$(r-p)^2\{1+(r+p)^2\}=1 \quad \cdots(*)$$

長方形PQRSの面積を T とすると

$$T=(r-p)(r^2-p^2)=(r-p)^2(r+p)$$

$(*)$ より　$(r-p)^2=\dfrac{1}{1+(r+p)^2}$　これを上式に代入すると

$$T=\frac{r+p}{1+(r+p)^2}=\frac{1}{\dfrac{1}{r+p}+(r+p)}$$

$r+p>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{r+p}+(r+p)\geqq 2\sqrt{\frac{1}{r+p}\cdot(r+p)}=2 \quad \text{ゆえに} \quad T\leqq\frac{1}{2}$$

上の不等式において，等号が成立するとき

$$\frac{1}{r+p}=r+p \quad \text{すなわち} \quad r+p=1 \quad \cdots①$$

① を $(*)$ に代入すると $(r-p>0)$

$$(r-p)^2(1+1^2)=1 \quad \text{ゆえに} \quad r-p=\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots②$$

①，② を解いて　$\boldsymbol{p=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4},\ r=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}}$

このとき，PQRSの面積は最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる． ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=f(x)$ が点 $(0,\ 0)$ を通るから，$f(x)=ax^2+bx$ とおく．

$y=f(x)$ が $(c,\ c^3-2c)$，$(1,-1)$ を通るから，$c \neq 0$ に注意して

$$\begin{cases} ac^2+bc=c^3-2c \\ a+b=-1 \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad (*)\begin{cases} ac+b=c^2-2 \\ a+b=-1 \end{cases}$$

$(*)$ で b を消去すると　$(c-1)a=c^2-1$

$c \neq 1$ であるから　$a=c+1$　これを $(*)$ の第 2 式に代入して

$$b=-c-2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{f(x)=(c+1)x^2-(c+2)x}$$

(2) $g(x)=x^3-2x-f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3-(c+1)x^2+cx \\ &= x(x-c)(x-1) \end{aligned}$$

ゆえに　$0 \leqq x \leqq c$ で $g(x) \geqq 0$，$c \leqq x \leqq 1$ で $g(x) \leqq 0$

$g(x)$ の原始関数の 1 つを

$$G(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(c+1)x^3+\frac{1}{2}cx^2$$

とおくと　$G(0)=0$,　$G(1)=\dfrac{1}{6}c-\dfrac{1}{12}$,　$G(c)=-\dfrac{1}{12}c^4+\dfrac{1}{6}c^3$

よって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^c g(x)\,dx-\int_c^1 g(x)\,dx = 2G(c)-G(0)-G(1) \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{6}c^4+\frac{1}{3}c^3-\frac{1}{6}c+\frac{1}{12}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dc} &= -\frac{2}{3}c^3+c^2-\frac{1}{6} \\ &= -\frac{1}{6}(2c-1)(2c^2-2c-1) \\ &= \frac{1}{6}(2c-1)\{2c(1-c)+1\} \end{aligned}$$

$0<c<1$ のとき，$2c(1-c)+1>0$ であるから，S の増減表は

c	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	(1)
$\frac{dS}{dc}$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，S を最小にする c の値は　$\boldsymbol{c=\dfrac{1}{2}}$　■

$\boxed{4}$ (1) $$\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\Big[\ \sin x\ \Big]_0^{\pi}=0,$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\Big[\ \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\ \Big]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi}\cos^3 x\,dx=\int_0^{\pi}\cos x(1-\sin^2 x)\,dx=\Big[\ \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x\ \Big]_0^{\pi}=0$$

$f(x)=a\cos x+b$ より

$$\int_0^{\pi}f(x)\,dx=a\int_0^{\pi}\cos x\,dx+b\int_0^{\pi}dx=b\pi,$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\{f(x)\}^3\,dx&=a^3\int_0^{\pi}\cos^3 x\,dx+3a^2b\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx\\&\qquad+3ab^2\int_0^{\pi}\cos x\,dx+b^3\int_0^{\pi}dx\\&=\frac{3}{2}a^2b\pi+b^3\pi\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{\pi}{4}+\int_0^{\pi}\{f(x)\}^3\,dx$ をみたすから

$$b\pi=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}a^2b\pi+b^3\pi\quad よって\quad \boldsymbol{6a^2b+4b^3-4b+1=0}$$

(2) $b>0$ であるから，(2) の結果より　$6a^2=-4b^2+4-\dfrac{1}{b}\quad\cdots(*)$

$g(b)=-4b^2+4-\dfrac{1}{b}$ とおくと $(b>0)$

$$g'(b)=-8b+\frac{1}{b^2}=\frac{1-8b^3}{b^2}$$

b	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(b)$		$+$	0	$-$
$g(b)$		$\nearrow$	1	$\searrow$

$\displaystyle\lim_{b\to+0}g(b)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{b\to\infty}g(b)=-\infty$

したがって，$(*)$ をみたす a が存在するとき

$$6a^2\leqq 1\quad すなわち\quad \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{6}}\leqq a\leqq\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 出た目が2回とも2以下，または，3以上である確率であるから

$$a_1 = \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \mathbf{\frac{5}{9}}$$

(2) c_1 は，2以下と3以上が1回ずつ出る確率であるから

$$c_1 = \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} \times 2 = \frac{4}{9}$$

n を自然数とすると，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_1 a_n + c_1 c_n \\ c_{n+1} = c_1 a_n + a_1 c_n \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad (*) \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{5}{9}a_n + \dfrac{4}{9}c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{4}{9}a_n + \dfrac{5}{9}c_n \end{cases}$$

$(*)$ の辺々を加えると　$a_{n+1} + c_{n+1} = a_n + c_n$

したがって　$a_n + c_n = a_1 + c_1 = \dfrac{5}{9} + \dfrac{4}{9} = 1 \quad \cdots ①$

よって，動点Pは A または C にいる．

(3) $(*)$ の第1式から第2式を引くと

$$a_{n+1} - c_{n+1} = \frac{1}{9}(a_n - c_n)$$

$\{a_n - c_n\}$ は初項 $a_1 - c_1 = \dfrac{1}{9}$，公比 $\dfrac{1}{9}$ の等比数列であるから

$$a_n - c_n = (a_1 - c_1)\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{1}{9^n} \quad \cdots ②$$

①，② から　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{9^n}\right)}$，　$\boldsymbol{c_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{9^n}\right)}$

(4) (3) の結果から　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}}$，　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} c_n = \dfrac{1}{2}}$　■