平成24年度　神戸大学２次試験前期日程(数学問題)120分
理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・
発達科学(人間環境(理科系))・海事科学

1 座標平面上に2点A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$と直線ℓがあり，Aとℓの距離とBとℓの距離の和が1であるという．以下の問に答えよ．

(1) ℓはy軸と平行でないことを示せ．

(2) ℓが線分ABと交わるとき，ℓの傾きを求めよ．

(3) ℓが線分ABと交わらないとき，ℓと原点との距離を求めよ．

2 xを実数とし，$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P=A-xE$とおく．$P$は$P^2=P$をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) xの値を求めよ．

(2) nを自然数とする．

$$A^n = a_nP + b_nE$$

をみたすa_n，b_nをnを用いて表せ．

3 $x>0$に対し関数$f(x)$を

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

と定め，$g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\dfrac{d}{dx}f(x)$を求めよ．

(2) $\dfrac{d}{dx}g(x)$を求めよ．

(3) $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$を求めよ．

4 自然対数の底を e とする．以下の問に答えよ．

(1) $e < 3$ であることを用いて，不等式 $\log 2 > \dfrac{3}{5}$ が成り立つことを示せ．

(2) 関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} - x$ の導関数を求めよ．

(3) 積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \cos x} dx$$

の値を求めよ．

(4) (3) で求めた値が正であるか負であるかを判定せよ．

5 座標平面上の曲線 C を，媒介変数 $0 \leqq t \leqq 1$ を用いて

$$\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) 曲線 C の概形を描け．

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) y 軸と平行な直線 ℓ の方程式を $x=k$ とおくと (k は定数)

$$\begin{array}{ll} \mathrm{A}(1,\ 0) \text{ と } \ell \text{ の距離は} & |k-1| \\ \mathrm{B}(-1,\ 0) \text{ と } \ell \text{ の距離は} & |k+1| \end{array}$$

一般に，2 つの実数 a，b について

$$|a|+|b| = \max(|a+b|, |a-b|)$$

であるから，$a=k-1$，$b=k+1$ とすると

$$|k-1|+|k+1| = \max(|2k|,\ 2)$$

$|k-1|+|k+1| \geqq 2$ であるから，このとき，A と ℓ の距離と B と ℓ の距離の和が 2 以上となり，条件に反する．よって，ℓ は y 軸と平行でない．

(2) ℓ の傾きを m とし，その方程式を $mx-y+n=0$ とすると，条件から

$$\frac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

したがって $$\frac{|m+n|+|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \quad \cdots(*)$$

ここで，$f(x,\ y) = mx-y+n$ とおくと

$$f(1,\ 0) = m+n, \quad f(-1,\ 0) = -m+n$$

ℓ が線分 AB と交わるから

$$f(1,\ 0)f(-1,\ 0) \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (m+n)(-m+n) \leqq 0$$

このとき $|m+n|+|-m+n| = |(m+n)-(-m+n)| = |2m|$

これを $(*)$ に代入して $\dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$ よって $\boldsymbol{m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(3) ℓ と原点の距離を d とすると $d = \dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}$

ℓ が線分 AB と交わらないから

$$f(1,\ 0)f(-1,\ 0) \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (m+n)(-m+n) \geqq 0$$

このとき $|m+n|+|-m+n| = |(m+n)+(-m+n)| = |2n|$

これを $(*)$ に代入して $\dfrac{|2n|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$ よって $d = \dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ ■

2 (1) ハミルトン・ケリーの定理を行列 $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ に適用すると

$$A^2-5A+6=O$$

これから，$P=A-2E$，$Q=-(A-3E)$ とおくと[1]

$$PQ=QP=O,\quad P+Q=E,\quad P^2=P,\quad Q^2=Q,\quad A=3P+2Q$$

よって　$\boldsymbol{x=2}$

(2) $A=3P+2Q$ より

$$A^n=3^nP+2^nQ=3^nP+2^n(E-P)=(3^n-2^n)P+2^nE$$

よって　$\boldsymbol{a_n=3^n-2^n}$，$\boldsymbol{b_n=2^n}$ ■

3 (1) $f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$ より　$\boldsymbol{\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}}$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}g(x)&=\frac{d}{dx}f\left(\frac{1}{x}\right)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'\\&=\frac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{1+x^2}}\end{aligned}$$

(3) (1)，(2) の結果から　$\dfrac{d}{dx}\left\{f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right\}=0$

$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ は定数であるから，これに $x=1$ を代入すると

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=2f(1)=2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$$

$t=\tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dt}{d\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

よって　$f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2\times\dfrac{\pi}{4}=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf 2

$\boxed{4}$ (1) $2^5 > 3^3 > e^3$ であるから　$2 > e^{\frac{3}{5}}$　　よって　$\log 2 > \dfrac{3}{5}$

(2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} - x$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin x)'(1+\cos x) - \sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} - 1 \\ &= \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} - 1 \\ &= \frac{1}{1+\cos x} - 1 = \boldsymbol{-\frac{\cos x}{1+\cos x}} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果に注意して

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\cos x}dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} - \frac{\cos x}{1+\cos x}\right)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{-\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x} + f'(x)\right\}dx \\ &= \left[-\log(1+\cos x) + \frac{\sin x}{1+\cos x} - x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \boldsymbol{\log 2 + 1 - \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

(4) (1) の結果を利用すると

$$\log 2 + 1 - \frac{\pi}{2} > \frac{3}{5} + 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{5} - \pi\right) > 0$$

よって，(3) で求めた値は　**正**

別解 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\cos x}dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\cos x}dx$

$x = \dfrac{\pi}{2} - y$ とおくと　$\dfrac{dx}{dy} = -1$

x	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
y	$\frac{\pi}{4} \longrightarrow 0$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\cos x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{\cos y - \sin y}{1+\sin y}(-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x}dx$$

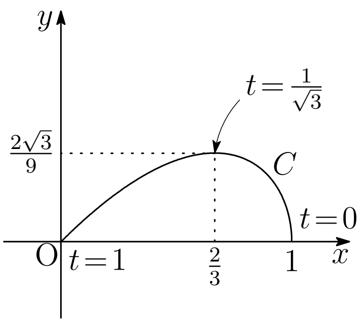
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{1+\cos x} + \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x}\right)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)^2}{(1+\cos x)(1+\sin x)}dx > 0 \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ より $\dfrac{dx}{dt} = -2t$，$\dfrac{dy}{dt} = 1 - 3t^2$

したがって，x，y の増減およびグラフの概形は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$		$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	
(x, y)	$(1, 0)$	$\cdots$	$\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$	$\cdots$	$(0, 0)$



(2) $x = 1 - t^2$ より $\dfrac{dx}{dt} = -2t$

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$1 \longrightarrow 0$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 xy\,dx \\ &= 2\pi \int_1^0 (1 - t^2)(t - t^3)(-2t)dt \\ &= 4\pi \int_0^1 (t^6 - 2t^4 + t^2)dt \\ &= 4\pi \left[\frac{t^7}{7} - \frac{2}{5}t^5 + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{32}{105}\pi} \end{aligned}$$

■