

平成23年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)120分  
理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・  
発達科学(人間環境(理科系))・海事科学

1  $i = \sqrt{-1}$  とする。以下の問に答えよ。

(1) 実数  $\alpha, \beta$  について, 等式

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

が成り立つことを示せ。

(2) 自然数  $n$  に対して,

$$z = \sum_{k=1}^n \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right)$$

とおくとき, 等式

$$z \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = z$$

が成り立つことを示せ。

(3) 2以上の自然数  $n$  について, 等式

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} = 0$$

が成り立つことを示せ。

2 以下の問に答えよ。

(1)  $t$  を正の実数とするととき,  $|x| + |y| = t$  の表す  $xy$  平面上の図形を図示せよ。

(2)  $a$  を  $a \geq 0$  をみたす実数とする。  $x, y$  が連立不等式

$$\begin{cases} ax + (2-a)y \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

をみたすとき,  $|x| + |y|$  のとりうる値の最小値  $m$  を,  $a$  を用いた式で表せ。

(3)  $a$  が  $a \geq 0$  の範囲を動くとき, (2) で求めた  $m$  の最大値を求めよ。

**3**  $n$  を 2 以上の自然数として,

$$S_n = \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k \log k}$$

とおく. 以下の問に答えよ.

- (1)  $\int_n^{n^3} \frac{dx}{x \log x}$  を求めよ.  
 (2)  $k$  を 2 以上の自然数とするとき,

$$\frac{1}{(k+1) \log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} < \frac{1}{k \log k}$$

を示せ.

- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  の値を求めよ.

**4**  $a$  は正の無理数で,  $X = a^3 + 3a^2 - 14a + 6$ ,  $Y = a^2 - 2a$  を考えると,  $X$  と  $Y$  はともに有理数である. 以下の問に答えよ.

- (1) 整式  $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$  を整式  $x^2 - 2x$  で割ったときの商と余りを求めよ.  
 (2)  $X$  と  $Y$  の値を求めよ.  
 (3)  $a$  の値を求めよ. ただし, 素数の平方根は無理数であることを用いてよい.

**5** 以下の問に答えよ.

- (1)  $x \geq 1$  において,  $x > 2 \log x$  が成り立つことを示せ. ただし,  $e$  を自然対数の底とするとき,  $2.7 < e < 2.8$  であることを用いてよい.  
 (2) 自然数  $n$  に対して,

$$(2n \log n)^n < e^{2n \log n}$$

が成り立つことを示せ.

## 解答例

$$\begin{aligned} \text{1} \quad (1) \quad & (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) \\ &= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

(2) 自然数  $n$  に対して,  $w \neq 0$  のとき

$$1 - w^n = (1 - w) \sum_{k=1}^n w^{k-1} \quad \dots (*)$$

が成立する.  $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$  とおくと

$$w^n = \cos 2\pi + i \sin 2\pi \quad \text{ゆえに} \quad 1 - w^n = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

(i)  $n = 1$  のとき,  $\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} = 1$  であるから, 等式

$$z \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = z$$

が成り立つ.

(ii)  $n \geq 2$  のとき,  $1 - w \neq 0$  であるから, (\*) および ① より

$$\sum_{k=1}^n w^{k-1} = 0$$

が成立するから

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=1}^n \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n w^k = w \sum_{k=1}^n w^{k-1} = 0 \quad \dots (**) \end{aligned}$$

$$\text{上式より} \quad z \left( \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = z$$

$$(3) \quad (**) \text{ より} \quad \sum_{k=1}^n \left( \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right) = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} = 0$$

$$\text{よって} \quad \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} = 0$$

別解

$$2 \cos \frac{2\pi k}{n} \sin \frac{\pi}{n} = \sin \frac{2k+1}{n} \pi - \sin \frac{2k-1}{n} \pi$$

$$2 \sin \frac{2\pi k}{n} \sin \frac{\pi}{n} = \cos \frac{2k-1}{n} \pi - \cos \frac{2k+1}{n} \pi$$

上の2式より

$$2 \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^n \left( \sin \frac{2k+1}{n} \pi - \sin \frac{2k-1}{n} \pi \right)$$

$$= \sin \frac{2n+1}{n} \pi - \sin \frac{\pi}{n} = 0,$$

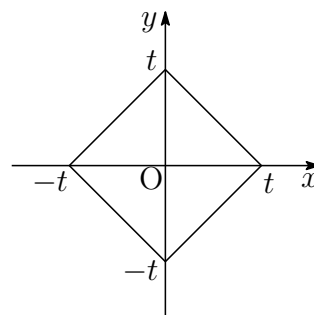
$$2 \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^n \left( \cos \frac{2k-1}{n} \pi - \cos \frac{2k+1}{n} \pi \right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{2n+1}{n} \pi = 0$$

$\sin \frac{\pi}{n} \neq 0$  であるから  $\sum_{k=1}^n \cos \frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi k}{n} = 0$  ■

**2** (1)  $|x| + |y| = t \quad \dots (*)$

$x \geq 0, y \geq 0$  のとき,  $x + y = t$  であるから,  
 (\*) 上の点  $(x, y)$  は2点  $(0, t), (t, 0)$  を結ぶ  
 線分上にある. このとき, 点  $(x, -y), (-x, y),$   
 $(-x, -y)$  は (\*) を満たす. したがって, (\*) は  $x$   
 軸,  $y$  軸, 原点に関して対称であるから, (\*) は  
 右のような図形である.



(2) 直線  $ax + (2 - a)y = 2$  の  $x$  切片は  $\frac{2}{a}$  ( $a \neq 0$ ),  $y$  切片は  $\frac{2}{2 - a}$  ( $a \neq 0$ )  
 $ax + (2 - a)y \geq 2$  ( $y \geq 0$ ) をみたすとき,  $|x| + |y|$  のとりうる値の最小値  $m$  は, 次のようになる.

(i)  $a = 0$  のとき  $y \geq 1$  よって,  $(x, y) = (0, 1)$  で  $m = 1$

(ii)  $0 < a \leq 1$  のとき,  $\frac{2}{2 - a} \leq \frac{2}{a}$  であるから

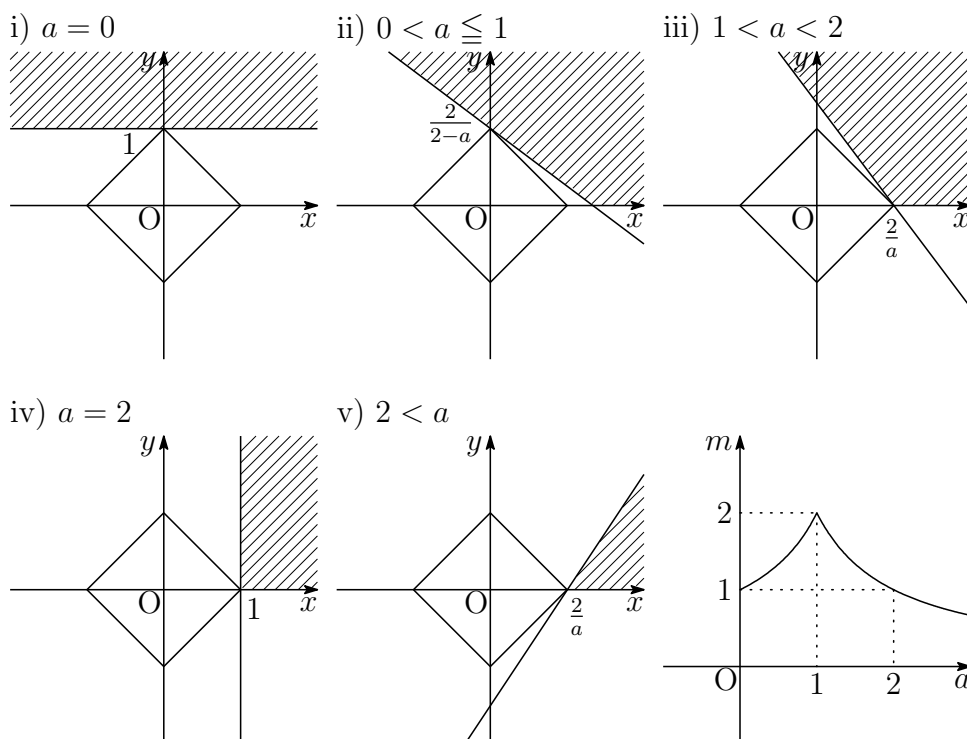
$$(x, y) = \left(0, \frac{2}{2 - a}\right) \text{ で } m = \frac{2}{2 - a}$$

(iii)  $1 < a < 2$  のとき,  $\frac{2}{a} < \frac{2}{2 - a}$  であるから

$$(x, y) = \left(\frac{2}{a}, 0\right) \text{ で } m = \frac{2}{a}$$

(iv)  $a = 2$  のとき  $x \geq 1$  よって,  $(x, y) = (1, 0)$  で  $m = 1$

(v)  $2 < a$  のとき  $(x, y) = \left(\frac{2}{a}, 0\right)$  で  $m = \frac{2}{a}$



$$(i) \sim (v) \text{ より } m = \begin{cases} \frac{2}{2 - a} & (0 \leq a < 1) \\ \frac{2}{a} & (1 \leq a) \end{cases}$$

(3) (2) の結果のグラフは, 右上の図ようになるから,  
 $a = 1$  のとき,  $m$  は最大値 **2** をとる. ■

$$\begin{aligned} \text{3 (1)} \quad \int_n^{n^3} \frac{dx}{x \log x} &= \int_n^{n^3} \frac{(\log x)'}{\log x} dx = \left[ \log(\log x) \right]_n^{n^3} \\ &= \log(\log n^3) - \log(\log n) = \log \frac{\log n^3}{\log n} = \log 3 \end{aligned}$$

(2)  $x \geq 2$ において、 $x \log x$ は正値をとる単調増加関数であるから、  
 $f(x) = \frac{1}{x \log x}$ とおくと、 $x \geq 2$ において、 $f(x)$ は単調減少関数である。  
 $k < x < k+1$ において( $k$ は2以上の自然数)、 $f(k+1) < f(x) < f(k)$ であるから

$$\int_k^{k+1} f(k+1) dx < \int_k^{k+1} f(x) dx < \int_k^{k+1} f(k) dx$$

$$\text{よって} \quad \frac{1}{(k+1) \log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} < \frac{1}{k \log k}$$

(3) (1),(2)の結果から

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{(k+1) \log(k+1)} &< \sum_{k=n}^{n^3-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} < \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k \log k} \\ S_n + \frac{1}{n^3 \log n^3} - \frac{1}{n \log n} &< \log 3 < S_n \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad 0 < S_n - \log 3 < \frac{1}{n \log n} - \frac{1}{n^3 \log n^3}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n \log n} - \frac{1}{n^3 \log n^3} \right) = 0$ であるから、はさみうちの原理により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - \log 3) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \log 3$$

■

4 (1) 右の割り算により

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{商} \quad x + 5 \\ \text{余り} \quad -4x + 6 \end{array} \right. \quad \begin{array}{r} x + 5 \\ x^2 - 2x \overline{) x^3 + 3x^2 - 14x + 6} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \phantom{+ 6} \\ 5x^2 - 14x \phantom{+ 6} \\ \underline{5x^2 - 10x} \phantom{+ 6} \\ -4x + 6 \end{array}$$

(2) (1) の結果から

$$x^3 + 3x^2 - 14x + 6 = (x^2 - 2x)(x + 5) - 4x + 6$$

これに  $x = a$  を代入すると

$$X = Y(a + 5) - 4a + 6 \quad \text{ゆえに} \quad (Y - 4)a = X - 5Y - 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$Y - 4 \neq 0 \text{ と仮定すると} \quad a = \frac{X - 5Y - 6}{Y - 4}$$

$X, Y$  は有理数であるから,  $a$  が無理数であることに反する.

したがって  $Y = 4$  これを  $\textcircled{1}$  に代入することにより  $X = 26$

(3)  $Y = 4$  であるから  $a^2 - 2a = 4$

$$a > 0 \text{ に注意してこれを解くと} \quad a = 1 + \sqrt{5}$$

5 (1)  $f(x) = x - 2 \log x$  とおくと  $f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$

$x$	1	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	1	↘	極小	↗

$$e > 2 \text{ より} \quad f(2) = 2 - 2 \log 2 = 2 \log \frac{e}{2} > 0$$

$x \geq 1$  において,  $f(x) > 0$ , すなわち,  $x > 2 \log x$

$$\begin{aligned} (2) \quad (2n \log n)^n < e^{2n \log n} &\iff 2n \log n < e^{2 \log n} = n^2 \\ &\iff 2 \log n < n \end{aligned}$$

(1) の結果から,  $n$  が自然数のとき  $2 \log n < n$

よって,  $n$  が自然数のとき  $(2n \log n)^n < e^{2n \log n}$