平成23年度　神戸大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・
発達科学(人間環境(理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 $i = \sqrt{-1}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 実数 α，β について，等式

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

が成り立つことを示せ．

(2) 自然数 n に対して，

$$z = \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$$

とおくとき，等式

$$z\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right) = z$$

が成り立つことを示せ．

(3) 2以上の自然数 n について，等式

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n} = 0$$

が成り立つことを示せ．

2 以下の問に答えよ．

(1) t を正の実数とするとき，$|x|+|y| = t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ．

(2) a を $a \geqq 0$ をみたす実数とする．x，y が連立不等式

$$\begin{cases} ax + (2-a)y \geqq 2 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

をみたすとき，$|x|+|y|$ のとりうる値の最小値 m を，a を用いた式で表せ．

(3) a が $a \geqq 0$ の範囲を動くとき，(2) で求めた m の最大値を求めよ．

3 n を 2 以上の自然数として，

$$S_n = \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k \log k}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\displaystyle\int_n^{n^3} \frac{dx}{x \log x}$ を求めよ．

(2) k を 2 以上の自然数とするとき，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} < \frac{1}{k \log k}$$

を示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ．

4 a は正の無理数で，$X = a^3 + 3a^2 - 14a + 6$，$Y = a^2 - 2a$ を考えると，X と Y はともに有理数である．以下の問に答えよ．

(1) 整式 $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$ を整式 $x^2 - 2x$ で割ったときの商と余りを求めよ．

(2) X と Y の値を求めよ．

(3) a の値を求めよ．ただし，素数の平方根は無理数であることを用いてよい．

5 以下の問に答えよ．

(1) $x \geqq 1$ において，$x > 2\log x$ が成り立つことを示せ．ただし，e を自然対数の底とするとき，$2.7 < e < 2.8$ であることを用いてよい．

(2) 自然数 n に対して，

$$(2n \log n)^n < e^{2n \log n}$$

が成り立つことを示せ．

解答例

1 (1) $\quad(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$
$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$
$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$

(2) 自然数 n に対して，$w\neq 0$ のとき

$$1-w^n=(1-w)\sum_{k=1}^{n}w^{k-1}\quad\cdots(*)$$

が成立する．$w=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とおくと

$$w^n=\cos 2\pi+i\sin 2\pi\quad \text{ゆえに}\quad 1-w^n=0\quad\cdots①$$

(i) $n=1$ のとき，$\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}=1$ であるから，等式

$$z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z$$

が成り立つ．

(ii) $n\geqq 2$ のとき，$1-w\neq 0$ であるから，$(*)$ および ① より

$$\sum_{k=1}^{n}w^{k-1}=0$$

が成立するから

$$\begin{aligned}z&=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}w^k=w\sum_{k=1}^{n}w^{k-1}=0\quad\cdots(**)\end{aligned}$$

上式より $\quad z\left(\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}\right)=z$

(3) $(**)$ より $\quad\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)=0$

ゆえに $\quad\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n}=0$

よって $\quad\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n}=0$

別解

$$2\cos\frac{2\pi k}{n}\sin\frac{\pi}{n}=\sin\frac{2k+1}{n}\pi-\sin\frac{2k-1}{n}\pi$$
$$2\sin\frac{2\pi k}{n}\sin\frac{\pi}{n}=\cos\frac{2k-1}{n}\pi-\cos\frac{2k+1}{n}\pi$$

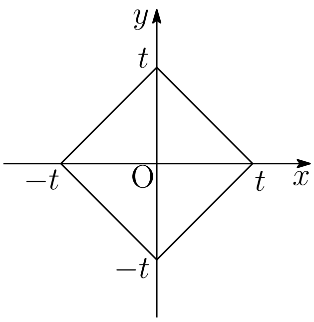
上の2式より

$$\begin{aligned}2\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{2k+1}{n}\pi-\sin\frac{2k-1}{n}\pi\right)\\&=\sin\frac{2n+1}{n}\pi-\sin\frac{\pi}{n}=0,\\2\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2k-1}{n}\pi-\cos\frac{2k+1}{n}\pi\right)\\&=\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{2n+1}{n}\pi=0\end{aligned}$$

$\sin\frac{\pi}{n}\neq 0$ であるから　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n}=0$ ■

2 (1)　$|x|+|y|=t \quad \cdots(*)$

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ のとき，$x+y=t$ であるから，$(*)$ 上の点 $(x,\ y)$ は2点 $(0,\ t)$，$(t,\ 0)$ を結ぶ線分上にある．このとき，点 $(x, -y)$，$(-x,\ y)$，$(-x, -y)$ は $(*)$ を満たす．したがって，$(*)$ は x 軸，y 軸，原点に関して対称であるから，$(*)$ は右のような図形である．



(2) 直線 $ax+(2-a)y=2$ の x 切片は $\dfrac{2}{a}$ $(a \neq 0)$，y 切片は $\dfrac{2}{2-a}$ $(a \neq 0)$

$ax+(2-a)y \geqq 2$ $(y \geqq 0)$ をみたすとき，$|x|+|y|$ のとりうる値の最小値 m は，次のようになる．

(i) $a=0$ のとき　$y \geqq 1$　よって，$(x,\ y)=(0,\ 1)$ で $m=1$

(ii) $0<a \leqq 1$ のとき，$\dfrac{2}{2-a} \leqq \dfrac{2}{a}$ であるから

$(x,\ y)=\left(0,\ \dfrac{2}{2-a}\right)$ で $m=\dfrac{2}{2-a}$

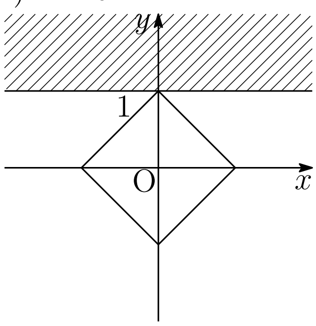
(iii) $1<a<2$ のとき，$\dfrac{2}{a}<\dfrac{2}{2-a}$ であるから

$(x,\ y)=\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$ で $m=\dfrac{2}{a}$

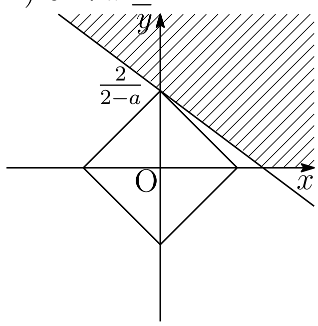
(iv) $a=2$ のとき　$x \geqq 1$　よって，$(x,\ y)=(1,\ 0)$ で $m=1$

(v) $2<a$ のとき　$(x,\ y)=\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$ で $m=\dfrac{2}{a}$

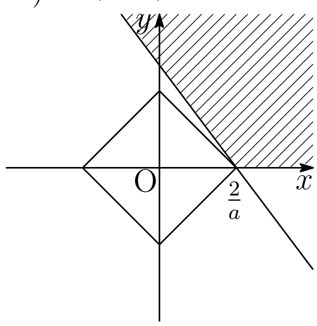
i) $a=0$



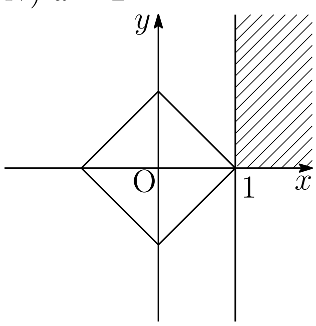
ii) $0<a \leqq 1$



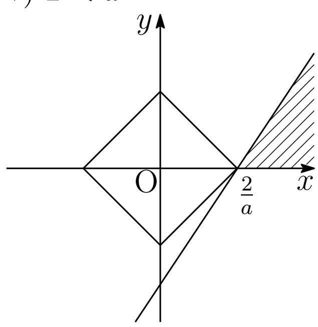
iii) $1<a<2$

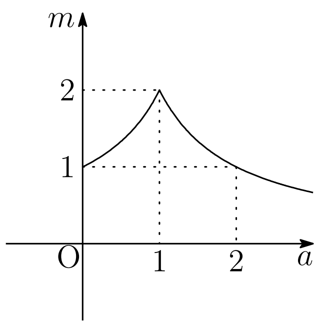


iv) $a=2$



v) $2<a$





(i)〜(v) より　$m=\begin{cases} \dfrac{2}{2-a} & (0 \leqq a<1) \\ \dfrac{2}{a} & (1 \leqq a) \end{cases}$

(3) (2) の結果のグラフは，右上の図にようになるから，

$a=1$ のとき，m は最大値 **2** をとる．■

$\boxed{3}$ (1) $\displaystyle\int_n^{n^3} \frac{dx}{x\log x} = \int_n^{n^3} \frac{(\log x)'}{\log x}dx = \Big[\ \log(\log x)\ \Big]_n^{n^3}$

$$= \log(\log n^3) - \log(\log n) = \log\frac{\log n^3}{\log n} = \mathbf{\log 3}$$

(2) $x \geqq 2$ において，$x\log x$ は正値をとる単調増加関数であるから，

$f(x) = \dfrac{1}{x\log x}$ とおくと，$x \geqq 2$ において，$f(x)$ は単調減少関数である．

$k < x < k+1$ において (k は 2 以上の自然数)，$f(k+1) < f(x) < f(k)$ であるから

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dx < \int_k^{k+1} f(x)\,dx < \int_k^{k+1} f(k)\,dx$$

よって
$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \int_k^{k+1}\frac{dx}{x\log x} < \frac{1}{k\log k}$$

(3) (1),(2) の結果から

$$\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \sum_{k=n}^{n^3-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x\log x} < \sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}$$
$$S_n + \frac{1}{n^3\log n^3} - \frac{1}{n\log n} < \log 3 < S_n$$

したがって
$$0 < S_n - \log 3 < \frac{1}{n\log n} - \frac{1}{n^3\log n^3}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\log n} - \frac{1}{n^3\log n^3}\right) = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - \log 3) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} S_n = \log 3}$$

■

4 (1) 右の割り算により

$$\begin{cases} \textbf{商} & \boldsymbol{x+5} \\ \textbf{余り} & \boldsymbol{-4x+6} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x \quad +5 \\ x^2-2x\,\overline{)\,x^3+3x^2-14x+6} \\ \underline{x^3-2x^2} \\ 5x^2-14x \\ \underline{5x^2-10x} \\ -4x+6 \end{array}$$

(2) (1) の結果から

$$x^3+3x^2-14+6=(x^2-2x)(x+5)-4x+6$$

これに $x=a$ を代入すると

$$X=Y(a+5)-4a+6 \quad \text{ゆえに} \quad (Y-4)a=X-5Y-6 \quad \cdots ①$$

$Y-4 \neq 0$ と仮定すると　$a=\dfrac{X-5Y-6}{Y-4}$

X，Y は有理数であるから，a が無理数であることに反する．

したがって　$\boldsymbol{Y=4}$　これを ① に代入することにより　$\boldsymbol{X=26}$

(3) $Y=4$ であるから　$a^2-2a=4$

$a>0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{a=1+\sqrt{5}}$ ■

5 (1) $f(x)=x-2\log x$ とおくと　$f'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$	極小	$\nearrow$

$e>2$ より　$f(2)=2-2\log 2=2\log\dfrac{e}{2}>0$

$x \geqq 1$ において，$f(x)>0$，すなわち，$x>2\log x$

(2) $(2n\log n)^n<e^{2n\log n} \iff 2n\log n<e^{2\log n}=n^2$

$\iff 2\log n<n$

(1) の結果から，n が自然数のとき　$2\log n<n$

よって，n が自然数のとき　$(2n\log n)^n<e^{2n\log n}$ ■