

平成22年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)120分

理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・
発達科学(人間環境(理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 a を実数とする. 関数 $f(x) = ax + \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$ が極値をもたないように, a の値の範囲を定めよ.

2 p を3以上の素数, a, b を自然数とする. 以下の間に答えよ. ただし, 自然数 m, n に対し, mn が p の倍数ならば, m または n は p の倍数であることを用いてよい.

(1) $a + b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ.

(2) $a + b$ と $a^2 + b^2$ がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ.

(3) $a^2 + b^2$ と $a^3 + b^3$ がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ.

3 $f(x) = \frac{\log x}{x}$, $g(x) = \frac{2 \log x}{x^2}$ ($x > 0$) とする. 以下の間に答えよ. ただし, 自然対数の底 e について, $e = 2.718\ldots$ であること, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることを証明なしで用いてよい.

(1) 2曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の座標をすべて求めよ.

(2) 区間 $x > 0$ において, 関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の増減, 極値を調べ, 2曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフの概形をかけ. グラフの変曲点は求めなくてよい.

(3) 区間 $1 \leq x \leq e$ において, 2曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$, および直線 $x = e$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

- 4 N を自然数とする．赤いカード 2 枚と白いカード N 枚が入っている袋から無作為にカードを 1 枚ずつ取り出して並べていくゲームをする．2 枚目の赤いカードが取り出された時点でゲームは終了する．赤いカードが最初に取り出されるまでに取り出された白いカードの枚数を X とし，ゲーム終了時までに取り出された白いカードの総数を Y とする．このとき，以下の問に答えよ．

- (1) $n = 0, 1, \dots, N$ に対して， $X = n$ となる確率 p_n を求めよ．
- (2) X の期待値を求めよ．
- (3) $n = 0, 1, \dots, N$ に対して， $Y = n$ となる確率 q_n を求めよ．

- 5 座標平面において，点 $P_n(a_n, b_n)$ ($n \geq 1$) を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2)$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．

- (1) a_n, b_n を n と θ を用いて表せ．
- (2) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき，自然数 n に対して，線分 $P_n P_{n+1}$ の長さ l_n を求めよ．
- (3) (2) で求めた l_n に対して， $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ を求めよ．

解答例

$$\boxed{1} \quad f(x) = ax + \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a - \sin x + \cos 2x = -2 \sin^2 x - \sin x + a + 1 \\ &= -2 \left(\sin x + \frac{1}{4} \right)^2 + a + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad a - 2 \leq f'(x) \leq a + \frac{9}{8}$$

$f(x)$ が極値をもたないとき、常に $f'(x) \leq 0$ または $f'(x) \geq 0$ であるから

$$a + \frac{9}{8} \leq 0 \quad \text{または} \quad a - 2 \geq 0 \quad \text{よって} \quad a \leq -\frac{9}{8}, \quad 2 \leq a$$

■

$$\boxed{2} \quad (1) \text{ 条件から } (A) \begin{cases} a + b \equiv 0 \\ ab \equiv 0 \end{cases} \pmod{p}$$

(A) の第 2 式から、 $a \equiv 0 \pmod{p}$ としても一般性を失わない.

これと (A) の第 1 式により

$$b \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\text{よって, } (A) \implies a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$$

$$(2) \text{ 条件から } (B) \begin{cases} a + b \equiv 0 \\ a^2 + b^2 \equiv 0 \end{cases} \pmod{p}$$

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ であることと、 p が 3 以上の素数であることから

$$(B) \implies \begin{cases} a + b \equiv 0 \\ -2ab \equiv 0 \end{cases} \pmod{p} \implies (A)$$

$$\text{よって, } (1) \text{ の結論により } (B) \implies a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$$

$$(3) \text{ 条件から } (C) \begin{cases} a^2 + b^2 \equiv 0 \\ a^3 + b^3 \equiv 0 \end{cases} \pmod{p}$$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$ であるから

$$\begin{aligned} (C) &\implies \begin{cases} a^2 + b^2 \equiv 0 \\ -ab(a + b) \equiv 0 \end{cases} \pmod{p} \\ &\implies (*) \begin{cases} (a + b)^2 - 2ab \equiv 0 \\ ab(a + b) \equiv 0 \end{cases} \pmod{p} \end{aligned}$$

$$(*) \text{ の第 2 式から } ab \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{または} \quad a + b \equiv 0 \pmod{p}$$

(i) $ab \equiv 0 \pmod{p}$ のとき, (*) の第 1 式から

$$(a+b)^2 \equiv 0 \implies a+b \equiv 0 \pmod{p}$$

(ii) $a+b \equiv 0 \pmod{p}$ のとき, (*) の第 1 式から, p が 3 以上の素数であることに注意して

$$-2ab \equiv 0 \implies ab \equiv 0 \pmod{p}$$

よって, (1) の結論により (C) $\implies a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$ ■

3 (1) $f(x) = \frac{\log x}{x}$, $g(x) = \frac{2 \log x}{x^2}$ より ($x > 0$)

$$f(x) - g(x) = \frac{\log x}{x} - \frac{2 \log x}{x^2} = \frac{(x-2) \log x}{x^2} \quad \dots (*)$$

2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の x 座標は $x = 1, 2$

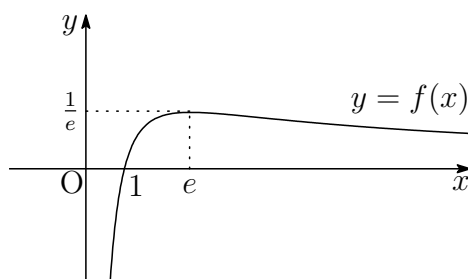
したがって, 2 曲線の共有点の座標は

$$(1, f(1)), (2, f(2)) \quad \text{すなわち} \quad (1, 0), \left(2, \frac{\log 2}{2}\right)$$

(2) $f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$ であるから

x	(0)	$\dots$	e	$\dots$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

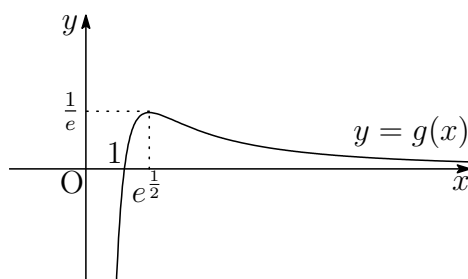


よって, $y = f(x)$ のグラフの概形は, 右の図のようになる.

$g'(x) = \frac{2(1 - 2 \log x)}{x^3}$ であるから

x	(0)	$\dots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\dots$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

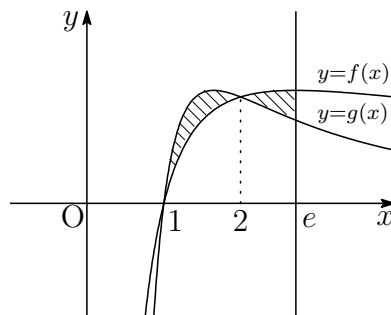


よって, $y = g(x)$ のグラフの概形は, 右の図のようになる.

(3) $h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと, (*) より

$$1 \leq x \leq 2 \text{ のとき } h(x) \leq 0,$$

$$2 \leq x \leq e \text{ のとき } h(x) \geq 0$$



$h(x)$ の不定積分を $t = \log x$ とおいて求める.

$$\begin{aligned} \int h(x) dx &= \int \left(\frac{t}{e^t} - \frac{2t}{e^{2t}} \right) e^t dt = \int (t - 2te^{-t}) dt \\ &= \frac{t^2}{2} + 2(t+1)e^{-t} + C = \frac{1}{2}(\log x)^2 + \frac{2(\log x + 1)}{x} + C \end{aligned}$$

$h(x)$ の原始関数の 1 つを $H(x) = \frac{1}{2}(\log x)^2 + \frac{2(\log x + 1)}{x}$ とおくと

$$H(1) = 2, \quad H(2) = \frac{1}{2}(\log 2)^2 + \log 2 + 1, \quad H(e) = \frac{1}{2} + \frac{4}{e}$$

よって, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= - \int_1^2 h(x) dx + \int_2^e h(x) dx \\ &= - \left[H(x) \right]_1^2 + \left[H(x) \right]_2^e \\ &= H(1) + H(e) - 2H(2) \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{4}{e} - 2 \left\{ \frac{1}{2}(\log 2)^2 + \log 2 + 1 \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{e} - (\log 2)^2 - 2 \log 2 \end{aligned}$$

■

- 4 (1) 赤いカード 2 枚と白いカード N 枚を順番をつけて並べる場合の総数は

$$\frac{(2+N)!}{2!N!} = \frac{1}{2}(N+1)(N+2)$$

1 番目から n 番目までにすべて白いカード, $n+1$ 番目に赤いカードが並び, $n+2$ 番目から $N+2$ 番目までに赤いカード 1 枚と白いカード $N-n$ 枚が並ぶ場合の数は

$$\frac{\{(N+2)-(n+2)+1\}!}{1!(N-n)!} = N-n+1$$

よって, 求める確率 p_n は

$$p_n = \frac{N-n+1}{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)} = \frac{2(N-n+1)}{(N+1)(N+2)}$$

- (2) (1) の結果から, 求める期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^N np_n = \frac{2}{(N+1)(N+2)} \sum_{n=1}^N \{(N+1)n - n^2\} \\ &= \frac{2}{(N+1)(N+2)} \left\{ \frac{1}{2}N(N+1)^2 - \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) \right\} \\ &= \frac{2N}{N+2} \left\{ \frac{1}{2}(N+1) - \frac{1}{6}(2N+1) \right\} = \frac{N}{3} \end{aligned}$$

- (3) 1 番目から $n+1$ 番目までに白いカード n 枚と赤いカード 1 枚が並び, $n+2$ 番目に赤いカードが並ぶ場合の数は

$$\frac{(n+1)!}{n!1!} = n+1$$

よって, 求める確率 q_n は

$$q_n = \frac{n+1}{\frac{1}{2}(N+1)(N+2)} = \frac{2(n+1)}{(N+1)(N+2)}$$



$$\boxed{5} \quad (1) \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \text{より}$$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta & -\sin(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta & \cos(n-1)\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{より}$$

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n-1)\theta, \quad b_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sin(n-1)\theta$$

$$(2) \quad (1) \text{の結果から} \quad OP_n = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad OP_{n+1} = \frac{1}{2^n}$$

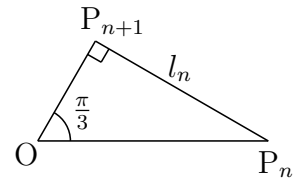
$$\angle P_n OP_{n+1} = \frac{\pi}{3} \text{であるから, 余弦定理より}$$

$$\begin{aligned} P_n P_{n+1}^2 &= OP_n^2 + OP_{n+1}^2 - 2OP_n OP_{n+1} \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2^{2n-2}} + \frac{1}{2^{2n}} - 2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} \\ &= (4 + 1 - 2) \frac{1}{2^{2n}} = \frac{3}{2^{2n}} \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad l_n = P_n P_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2^n}$$

$$\text{補足} \quad OP_{n+1} = \frac{1}{2} OP_n, \quad \angle P_n OP_{n+1} = \frac{\pi}{3} \text{であるから}$$

$$l_n = P_n P_{n+1} = \sqrt{3} OP_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2^n}$$



$$(3) \quad (2) \text{の結果から}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} l_n &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

■