

平成21年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・
発達科学(人間環境(理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

- 1 a, b は実数で $a > b > 0$ とする. 区間 $0 \leq x \leq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める.

$$f(x) = \log(ax + b(1-x)) - x \log a - (1-x) \log b$$

ただし, $\log$ は自然対数を表す. このとき, 以下のことを示せ.

- (1) $0 < x < 1$ に対して $f''(x) < 0$ が成り立つ.
- (2) $f'(c) = 0$ をみたす実数 c が, $0 < c < 1$ の範囲にただ1つ存在する.
- (3) $0 \leq x \leq 1$ をみたす実数 x に対して,

$$ax + b(1-x) \geq a^x b^{1-x}$$

が成り立つ.

- 2 $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$ とし, 方程式 $f(x) = 0$ について考える. このとき, 以下のことを示せ.

- (1) $f(x) = 0$ は絶対値が2より小さい3つの相異なる実数解をもつ.
- (2) α が $f(x) = 0$ の解ならば, $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解となる.
- (3) $f(x) = 0$ の解を小さい順に $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすれば

$$g(\alpha_1) = \alpha_3, \quad g(\alpha_2) = \alpha_1, \quad g(\alpha_3) = \alpha_2$$

となる.

- 3 a を $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ の範囲にある実数とする. 2つの直線 $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ および2つの曲線 $y = \cos(x-a)$, $y = -\cos x$ によって囲まれる図形を G とする. このとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 図形 G の面積を S とする. S を a を用いた式で表せ.
- (2) a が $0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, S を最大にするような a の値と, そのときの S の値を求めよ.
- (3) 図形 G を x 軸の回りに1回転させてできる立体の体積を V とする. V を a を用いた式で表せ.

- 4 大小2つのサイコロを同時に1回投げて、大きいサイコロの出た目の数 A 、および小さいサイコロの出た目の数 B に応じて得点を競うゲームを考える。ただし、このゲームには6種類の得点 X_n ($1 \leq n \leq 6$) があって、それぞれ、次の規則で定められているとする：

$$X_n = \begin{cases} A & (A \geq n \text{ のとき}) \\ B & (A < n \text{ かつ } A \neq B \text{ のとき}) \\ aA + b & (A < n \text{ かつ } A = B \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで、 a, b は実数の定数である。また、得点 X_n の期待値を E_n とする。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) A, B のとり得る値に対する得点 X_3 および X_4 の値を、答案用紙の表にそれぞれ記入せよ。

答案用紙の表

X_3	$A \backslash B$	1	2	3	4	5	6
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

X_4	$A \backslash B$	1	2	3	4	5	6
	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

- (2) $E_4 - E_3$ を求めよ。
 (3) $E_1 = E_2 = \dots = E_6$ となるような a, b はあるか。あれば求めよ。なければ、そのことを示せ。

- 5 t を実数として、数列 $a_1, a_2, \dots$ を

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= 2t, \\ a_{n+1} &= 2ta_n - a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

で定める。このとき、以下の問に答えよ。

- (1) $t \geq 1$ ならば、 $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ となることを示せ。
 (2) $t \leq -1$ ならば、 $0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \dots$ となることを示せ。
 (3) $-1 < t < 1$ ならば、 $t = \cos \theta$ となる θ を用いて、

$$a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (n \geq 1)$$

となることを示せ。

解答例

1 (1) $f(x) = \log(ax + b(1-x)) - x \log a - (1-x) \log b$ より

$$f'(x) = \frac{a-b}{ax+b(1-x)} - \log a + \log b$$

$$f''(x) = -\frac{(a-b)^2}{\{ax+b(1-x)\}^2} < 0$$

(2) $f(0) = \log b - \log b = 0$, $f(1) = \log a - \log a = 0$

したがって、ロルの定理により

$$f'(c) = 0 \quad (0 < c < 1) \quad \cdots (*)$$

をみたす c が少なくとも 1 つ存在する. (1) の結果から, $f'(x)$ は単調減少であるから, $(*)$ をみたす c はただ 1 つ存在する.

別解 $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ であるから, 平均値の定理により

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0 \quad (0 < c < 1)$$

$f'(x)$ は単調減少であるから, 上式をみたす c はただ 1 つ存在する.

別解 $f'(0) = \frac{a-b}{b} - \log a + \log b = \frac{a}{b} - 1 - \log \frac{a}{b}$

$$f'(1) = \frac{a-b}{a} - \log a + \log b = -\left(\frac{b}{a} - 1 - \log \frac{b}{a}\right)$$

ここで, $g(t) = t - 1 - \log t$ とすると $g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって, $g(t) \geq 0$ (等号が成立するのは $t = 1$ のとき)

$a > b > 0$ より, $0 < \frac{b}{a} < 1 < \frac{a}{b}$ であるから

$$f'(0) = g\left(\frac{a}{b}\right) > 0, \quad f'(1) = -g\left(\frac{b}{a}\right) < 0$$

(1) の結果から, $f'(x)$ は単調減少であるから

$$f'(c) = 0 \quad (0 < c < 1)$$

をみたす c がただ 1 つ存在する.

(3) (1), (2) の結果から, $f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

$0 \leq x \leq 1$ において, $f(x) \geq 0$ であるから

$$\log(ax + b(1-x)) - x \log a - (1-x) \log b \geq 0$$

$$\text{ゆえに} \quad \log(ax + b(1-x)) \geq \log a^x b^{1-x}$$

$$\text{よって} \quad ax + b(1-x) \geq a^x b^{1-x}$$

解説 $a_k > 0$, $p_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$), $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ に対し,

$$M = p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n$$

$$h(x) = g\left(\frac{x}{M}\right) = \frac{x}{M} - 1 - \log \frac{x}{M}$$

とおくと, $x > 0$ について $h(x) \geq 0$ が成り立つ. また, 等号が成り立つのは, $x = M$ のときに限る.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p_k h(a_k) &= \sum_{k=1}^n p_k \left(\log M - \log a_k - 1 + \frac{a_k}{M} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(p_k \log M - p_k \log a_k - p_k + \frac{p_k a_k}{M} \right) \\ &= \log M - \sum_{k=1}^n \log a_k^{p_k} - 1 + \frac{M}{M} \\ &= \log M - \log (a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}) \end{aligned}$$

$p_k h(a_k) \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) であるから (等号が成り立つのは, $a_k = M$ のとき)

$$\log M - \log (a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}) \geq 0$$

$$\text{したがって} \quad p_1 a_1 + p_2 a_2 + \dots + p_n a_n \geq a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n}$$

(等号が成り立つのは, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ のとき)

とくに, $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ とすると, 次式が成り立つ.

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

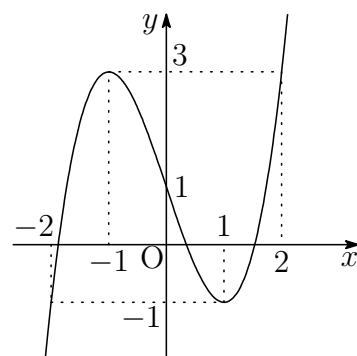


- 2** (1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗



$y = f(x)$ のグラフは、右の図のようになる.

$f(-2) = -1$, $f(2) = 3$, 極大値 $f(-1) = 3 > 0$, 極小値 $f(1) = -1 < 0$ であるから, $f(x) = 0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ.

- (2) α が $f(x) = 0$ の解であるとき

$$\begin{aligned} f(g(\alpha)) &= g(\alpha)^3 - 3g(\alpha) + 1 = (\alpha^2 - 2)^3 - 3(\alpha^2 - 2) + 1 \\ &= \alpha^6 - 6\alpha^4 + 9\alpha^2 - 1 = (\alpha^3 - 3\alpha)^2 - 1 \\ &= (\alpha^3 - 3\alpha + 1)(\alpha^3 - 3\alpha - 1) = f(\alpha)(\alpha^3 - 3\alpha - 1) = 0 \end{aligned}$$

よって, $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解である.

- (3) $f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}) = 1$ であるから, (1) のグラフから

$$-2 < \alpha_1 < -\sqrt{3}, \quad 0 < \alpha_2 < 1, \quad 1 < \alpha_3 < \sqrt{3}$$

ゆえに $\alpha_2^2 - 2 < \alpha_3^2 - 2 < \alpha_1^2 - 2$ すなわち $g(\alpha_2) < g(\alpha_3) < g(\alpha_1)$

$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ であるから, (2) の結果より

$$g(\alpha_2) = \alpha_1, \quad g(\alpha_3) = \alpha_2, \quad g(\alpha_1) = \alpha_3$$

解説 $f(2 \cos \theta) = (2 \cos \theta)^3 - 3 \cdot 2 \cos \theta + 1 = 2 \cos 3\theta + 1$

$0 \leq \theta \leq \pi$ における $2 \cos 3\theta + 1 = 0$ の解は $\theta = \frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi$

条件により $\alpha_1 = 2 \cos \frac{8}{9}\pi$, $\alpha_2 = 2 \cos \frac{4}{9}\pi$, $\alpha_3 = 2 \cos \frac{2}{9}\pi$

$g(2 \cos \theta) = (2 \cos \theta)^2 - 2 = 2 \cos 2\theta$ であるから

$$g(\alpha_1) = g\left(2 \cos \frac{8}{9}\pi\right) = 2 \cos \frac{16}{9}\pi = 2 \cos \frac{2}{9}\pi = \alpha_3$$

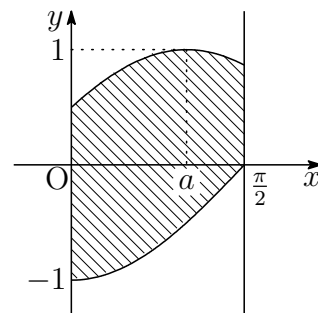
$$g(\alpha_2) = g\left(2 \cos \frac{4}{9}\pi\right) = 2 \cos \frac{8}{9}\pi = \alpha_1$$

$$g(\alpha_3) = g\left(2 \cos \frac{2}{9}\pi\right) = 2 \cos \frac{4}{9}\pi = \alpha_2$$



- 3** (1) 右の図から求める面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\cos(x-a) - (-\cos x)\} dx \\
 &= \left[\sin(x-a) + \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \sin(-a) + 1 \\
 &= \sin a + \cos a + 1
 \end{aligned}$$

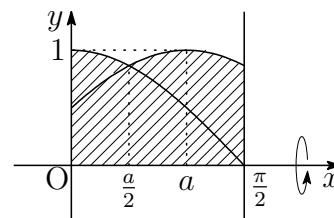


- (2) (1) の結果から $S = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

$0 \leq a < \frac{\pi}{2}$ より, $a = \frac{\pi}{4}$ のとき, S は最大値 $\sqrt{2} + 1$ をとる.

- (3) $\cos x - \cos(x-a) = -2 \sin \frac{2x-a}{2} \sin \frac{a}{2}$
 $y = \cos x$, $y = \cos(x-a)$ の交点の x 座標は

$$\sin \frac{2x-a}{2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a}{2}$$



右の図から, 求める体積 V は

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{a}{2}} \cos^2 x \, dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x-a) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{a}{2}} \cos 2x \, dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2(x-a) \, dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\
 &= \left[\frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\frac{a}{2}} + \left[\frac{1}{4} \sin 2(x-a) \right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \left[x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{1}{4} \sin a + \frac{1}{4} \sin(\pi - 2a) - \frac{1}{4} \sin(-a) + \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{1}{4} \sin 2a + \frac{1}{2} \sin a + \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

よって $V = \frac{\pi}{4}(\sin 2a + 2 \sin a + \pi)$ ■

4 (1)

$$X_3$$

$A \backslash B$	1	2	3	4	5	6
1	$a+b$	2	3	4	5	6
2	1	$2a+b$	3	4	5	6
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

$$X_4$$

$A \backslash B$	1	2	3	4	5	6
1	$a+b$	2	3	4	5	6
2	1	$2a+b$	3	4	5	6
3	1	2	$3a+b$	4	5	6
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

(2) X_3 と X_4 は 3 行目の値だけ異なり, 他の行の値は等しいから

$$E_4 - E_3 = \frac{1 + 2 + (3a + b) + 4 + 5 + 6}{36} - \frac{3 \cdot 6}{36} = \frac{3a + b}{36}$$

(3) X_k と X_{k+1} は k 行目の値だけ異なり, 他の行の値は等しいから ($1 \leq k \leq 5$)

$$E_{k+1} - E_k = \frac{21 - k + (ka + b)}{36} - \frac{6k}{36} = \frac{(a - 7)k + b + 21}{36}$$

$E_1 = E_2 = \dots = E_6$ となるのは, $1 \leq k \leq 5$ に対して $E_{k+1} - E_k = 0$ が成立することであるから

$$a - 7 = 0, \quad b + 21 = 0 \quad \text{よって} \quad a = 7, \quad b = -21$$

■

5 (1) $t \geq 1$ のとき, 自然数 n について

$$a_{n+1} > a_n > 0 \quad \cdots (*)$$

$$[1] \quad a_2 = 2t \geq 2 > a_1$$

よって, $n = 1$ のとき, $(*)$ が成立する.

$$[2] \quad n = k \text{ のとき, } (*) \text{ が成立すると仮定すると, } a_{k+2} = 2ta_{k+1} - a_k \text{ より}$$

$$a_{k+2} - a_{k+1} = 2(t-1)a_{k+1} + a_{k+1} - a_k > a_{k+1} - a_k > 0$$

$n = k+1$ のときも, $(*)$ は成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, $(*)$ が成立する.

$$(2) \quad a_n = (-1)^{n-1}b_n \text{ とすると, } a_{n+2} = 2ta_{n+1} - a_n \text{ より}$$

$$(-1)^{n+1}b_{n+2} = 2t(-1)^nb_{n+1} - (-1)^{n-1}b_n$$

$$\text{ゆえに } b_{n+2} = (-2t)b_{n+1} - b_n, \quad t \leq -1 \text{ のとき } b_2 = -2t \geq 2 > 1 = b_1$$

これを (1) の結果に適用すると

$$0 < b_1 < b_2 < b_3 < \cdots \quad \text{ゆえに} \quad 0 < a_1 < -a_2 < a_3 < \cdots$$

$$\text{よって} \quad 0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \cdots$$

別解 $a_{n+1} = 2ta_n - a_{n-1}$ より

$$|a_{n+1}| = |2ta_n - a_{n-1}| \geq 2|t||a_n| - |a_{n-1}|$$

$t \leq -1$ より, $|t| \geq 1$ であるから

$$|a_{n+1}| - |a_n| \geq |a_n| - |a_{n-1}| + 2(|t| - 1)|a_n| \geq |a_n| - |a_{n-1}|$$

$$|a_2| - |a_1| = |2t| - 1 > 0 \text{ であるから}$$

$$|a_{n+1}| - |a_n| \geq |a_n| - |a_{n-1}| \geq \cdots \geq |a_2| - |a_1| > 0$$

$$\text{よって} \quad 0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \cdots$$

$$(3) \quad (A) \quad a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (n \geq 1)$$

$$[1] \quad a_1 = \frac{\sin \theta}{\sin \theta} = 1, \quad a_2 = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta = 2t$$

よって, $n = 1, 2$ のとき, (A) は成立する.

[2] $n \leq k$ のとき, (A) が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2ta_k - a_{k-1} \\ &= 2 \cos \theta \cdot \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{2 \cos \theta \sin k\theta - \sin(k-1)\theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{2 \cos \theta \sin k\theta - (\sin k\theta \cos \theta - \cos k\theta \sin \theta)}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

よって, $n = k+1$ のときも, (A) が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, (A) が成立する.

別解 漸化式 $a_{n+1} - 2(\cos \theta)a_n + a_{n-1} = 0$ の特性方程式は

$$x^2 - 2(\cos \theta)x + 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

$$\alpha = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \beta = \cos \theta - i \sin \theta \quad \text{とおくと}$$

$$a_{n+1} - (\alpha + \beta)a_n + \alpha\beta a_{n-1} = 0$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \cos \theta \quad \text{より} \quad a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

$$\text{よって} \quad a_n = \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^n - (\cos \theta - i \sin \theta)^n}{(\cos \theta + i \sin \theta) - (\cos \theta - i \sin \theta)} = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$$

■