

## 平成 20 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分

理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・  
発達科学 (人間環境 (理科系))・海事科学

## 問題 1 2 3 4 5

1 実数  $x, y$  に関する次の各命題の真偽を答えよ. さらに, 真である場合には証明し, 偽である場合は反例をあげよ.

- (1)  $x > 0$  かつ  $xy > 0$  ならば,  $y > 0$  である.
- (2)  $x \geq 0$  かつ  $xy \geq 0$  ならば,  $y \geq 0$  である.
- (3)  $x + y \geq 0$  かつ  $xy \geq 0$  ならば,  $y \geq 0$  である.

2  $xy$  平面上に 3 点  $A(1, 0)$ ,  $B(-1, 0)$ ,  $C(0, \sqrt{3})$  をとる. このとき, 次の問に答えよ.

- (1)  $A, B$  の 2 点を中心とする同じ半径  $r$  の 2 つの円が接する. このような  $r$  の値を求めよ.
- (2) (1) で求めた  $r$  の値について,  $C$  を中心とする半径  $r$  の円が,  $A, B$  の 2 点を中心とする半径  $r$  の 2 つの円のどちらとも接することを示せ.
- (3)  $A, B, C$  の 3 点を中心とする同じ半径  $s$  の 3 つの円が直線  $l$  に接する. このような  $s$  の値と直線  $l$  の方程式をすべて求めよ.

3 1 から  $n$  までの自然数  $1, 2, 3, \dots, n$  の和を  $S$  とするとき, 次の問に答えよ.

- (1)  $n$  を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば,  $S$  が偶数であることを示せ.
- (2)  $S$  が偶数ならば,  $n$  を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ.
- (3)  $S$  が 4 の倍数ならば,  $n$  を 8 で割った余りが 0 または 7 であることを示せ.

4  $xy$  平面上に 5 点  $A(0, 2)$ ,  $B(2, 2)$ ,  $C(2, 1)$ ,  $D(4, 1)$ ,  $P(0, 3)$  をとる. 点  $P$  を通り傾き  $a$  の直線  $l$  が, 線分  $BC$  と交わり, その交点は  $B, C$  と異なるとする. このとき, 次の問に答えよ.

- (1)  $a$  の値の範囲を求めよ.
- (2) 直線  $l$  と線分  $AB$ , 線分  $BC$  で囲まれる図形を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を  $V_1$ , 直線  $l$  と線分  $BC$ , 線分  $CD$  で囲まれる図形を  $x$  軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を  $V_2$  とするとき, それらの和  $V = V_1 + V_2$  を  $a$  の式で表せ.
- (3) (1) で求めた  $a$  の値の範囲で, (2) で求めた  $V$  は,  $a = -\frac{3}{4}$  で最小値をとることを示せ.

**5**  $n, k$  を自然数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1)  $(1+x)^n$  の展開式を用いて，次の等式を示せ．

$$\begin{aligned} 2^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n \\ 0 &= {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n \end{aligned}$$

(2)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$  を求めよ．

(3) 2 次の正方行列  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$  は，それぞれが  $\frac{1}{3}$  の確率で，

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  のいずれかになるとする． $n$  個の行列の積  $M_1 M_2 M_3 \cdots M_n$  が  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  と等しくなる確率を求めよ．

## 解答例

**1** (1)  $x > 0$  より,  $\frac{1}{x} > 0$  を  $xy > 0$  の辺々に掛けると  $y > 0$  よって 真

(2) 偽 反例:  $x = 0, y = -1$

(3)  $y < 0$  と仮定し, これを  $x + y \geq 0$  の辺々に掛けると  $xy + y^2 \leq 0 \cdots (*)$   
 仮定より,  $y^2 > 0$ , 条件より,  $xy \geq 0$  であるから  $xy + y^2 > 0$   
 これは,  $(*)$  に反し, 矛盾を生じる. よって 偽 ■

**2** (1)  $A(1, 0), B(-1, 0)$  より  $AB = 2$  このとき  $r + r = 2$  よって  $r = 1$

(2)  $A(1, 0), B(-1, 0), C(0, \sqrt{3})$  より  $AB = BC = CA = 2$   
 よって,  $C$  を中心とする半径  $r = 1$  の円が,  $A, B$  の 2 点を中心とする半径  $r = 1$  の 2 つの円に接する.

(3) 直線  $l$  の方程式を  $px + qy + k = 0$  ( $p^2 + q^2 = 1, q \geq 0$ ) とおく. 3 点  $A(1, 0), B(-1, 0), C(0, \sqrt{3})$  から直線  $l$  までの距離がすべて  $s$  であるから

$$|p + k| = |-p + k| = |\sqrt{3}q + k| = s$$

$$p^2 + 2pk + k^2 = p^2 - 2pk + k^2 = 3q^2 + 2\sqrt{3}qk + k^2 = s^2 \cdots (*)$$

$(*)$  の第 1 式と第 2 式を整理すると  $pk = 0$

(i)  $p = 0$  のとき,  $p, q$  の条件から  $q = 1$  これらを  $(*)$  に代入すると

$$k^2 = 3 + 2\sqrt{3}k + k^2 = s^2 \quad \text{ゆえに} \quad k = -\frac{\sqrt{3}}{2}, s = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{このとき, } l \text{ の方程式は } y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

(ii)  $k = 0$  のとき, これを  $(*)$  に代入すると

$$p^2 = 3q^2 = s^2 \quad \text{ゆえに} \quad p^2 = s^2, q^2 = \frac{s^2}{3}$$

$$\text{これらを } p^2 + q^2 = 1 \text{ に代入することにより } s = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{したがって } p = \pm s = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, q = \frac{s}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{このとき, } l \text{ の方程式は } \pm \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \quad \text{すなわち} \quad \pm \sqrt{3}x + y = 0$$

$$(i), (ii) \text{ より } s = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad l \text{ は } y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \pm \sqrt{3}x + y = 0 \quad \text{■}$$

3 (1)  $S = 1 + 2 + 3 \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \cdots (*)$

$n$  を 4 で割った余りが 0 のとき,  $\frac{n}{4}$  は整数であるから

$$S = 2 \times \frac{n}{4}(n+1) \quad \text{ゆえに } S \text{ は偶数}$$

$n$  を 4 で割った余りが 3 のとき,  $\frac{n+1}{4}$  は整数であるから

$$S = 2 \times n \cdot \frac{n+1}{4} \quad \text{ゆえに } S \text{ は偶数}$$

(2)  $n$  と  $n+1$  は偶奇が異なるから,  $S$  が偶数ならば,  $(*)$  より,  $n$  または  $n+1$  が 4 の倍数, すなわち,  $n$  を 4 で割った余りが 0 または 3 である.

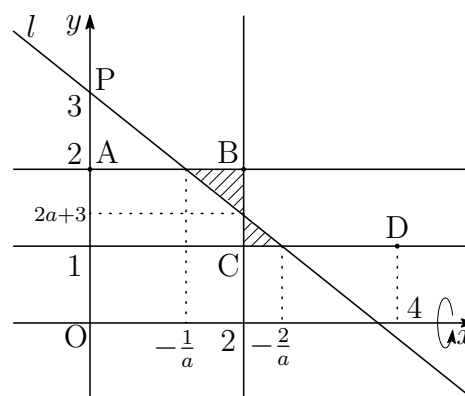
(3) (2) と同様に,  $S$  が 4 の倍数ならば,  $(*)$  より,  $n$  または  $n+1$  が 8 の倍数, すなわち,  $n$  を 8 で割った余りが 0 または 7 である. ■

4 (1)  $l: y = ax + 3$  が線分 BC と交わる時  
(2 点 B, C と異なる)

$x = 2$  のとき,  $1 < y < 2$  であるから

$$1 < 2a + 3 < 2$$

よって  $-1 < a < -\frac{1}{2}$



(2) 直線  $l$  と 2 直線  $y = 2$ ,  $y = 1$  との共有点の  $x$  座標は, 2 つの方程式

$$ax + 3 = 2, \quad ax + 3 = 1$$

をそれぞれ解いて  $x = -\frac{1}{a}, \quad x = -\frac{2}{a}$

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= \int_{-\frac{1}{a}}^2 \{2^2 - (ax + 3)^2\} dx = - \int_{-\frac{1}{a}}^2 (ax + 1)(ax + 5) dx \\ &= - \int_{-\frac{1}{a}}^2 \{(ax + 1)^2 + 4(ax + 1)\} dx \\ &= - \left[ \frac{1}{3a}(ax + 1)^3 + \frac{2}{a}(ax + 1)^2 \right]_{-\frac{1}{a}}^2 \\ &= -\frac{1}{3a}(2a + 1)^3 - \frac{2}{a}(2a + 1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{V_2}{\pi} &= \int_2^{-\frac{2}{a}} \{(ax+3)^2 - 1^2\} dx = \int_2^{-\frac{2}{a}} (ax+4)(ax+2) dx \\
&= \int_2^{-\frac{2}{a}} \{(ax+2)^2 + 2(ax+2)\} dx \\
&= \left[ \frac{1}{3a}(ax+2)^3 + \frac{1}{a}(ax+2)^2 \right]_2^{-\frac{2}{a}} \\
&= -\frac{1}{3a}(2a+2)^3 - \frac{1}{a}(2a+2)^2
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \frac{V_1}{\pi} + \frac{V_2}{\pi} \\
&= -\frac{1}{3a}\{(2a+1)^3 + (2a+2)^3\} - \frac{1}{a}\{2(2a+1)^2 + (2a+2)^2\} \\
&= -\frac{1}{3a}\{(2a+1)^3 + (2a+2)^3 + 6(2a+1)^2 + 3(2a+2)^2\} \\
&= -\frac{1}{3a}(16a^3 + 72a^2 + 78a + 27)
\end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad V = -\frac{\pi}{3} \left( 16a^2 + 72a + 78 + \frac{27}{a} \right)$$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{da} &= -\frac{\pi}{3} \left( 32a + 72 - \frac{27}{a^2} \right) \\
&= -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{32a^3 + 72a^2 - 27}{a^2} \\
&= -\frac{\pi(4a+3)(8a^2 + 12a - 9)}{3a^2}
\end{aligned}$$

ここで,  $8a^2 + 12a - 9 = 8\left(a + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{27}{2}$  より,  $-1 < a < -\frac{1}{2}$  において

$$-\frac{27}{2} \leq 8a^2 + 12a - 9 < -13$$

|                 |        |            |                |            |                  |
|-----------------|--------|------------|----------------|------------|------------------|
| $a$             | $(-1)$ | $\cdots$   | $-\frac{3}{4}$ | $\cdots$   | $(-\frac{1}{2})$ |
| $\frac{dV}{da}$ |        | $-$        | $0$            | $+$        |                  |
| $V$             |        | $\searrow$ | 極小             | $\nearrow$ |                  |

よって,  $V$  は  $a = -\frac{3}{4}$  で最小となる. ■

**5** (1) 2項定理より

$$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + {}_nC_3x^3 + \cdots + {}_nC_nx^n \quad \cdots (*)$$

(\*) に  $x = 1$  を代入すると

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n$$

(\*) に  $x = -1$  を代入すると

$$0 = {}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + \cdots + (-1)^n {}_nC_n$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$k \text{ が奇数のとき} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k \text{ が偶数のとき} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) (1) の結果の辺々を加えて、両辺を 2 で割ると

$$2^{n-1} = {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots + \frac{1+(-1)^n}{2} {}_nC_n \quad \cdots (**)$$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  とおくと,  $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$  の  $n$  個の行列は  $E$  と  $F$  からなり,  $F$  の個数が偶数個であるから, 求める確率は

$$\begin{aligned} & {}_nC_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_nC_2 \left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_nC_4 \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots + \frac{1+(-1)^n}{2} {}_nC_n \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left( {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots + \frac{1+(-1)^n}{2} {}_nC_n \right) \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 2^{n-1} \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{2^{n-1}}{3^n} \end{aligned}$$

■