

平成19年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)120分

理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・
発達科学(人間環境(理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

- 1 四面体 ABCD において、辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ O, P, Q, R とする。このとき、次の間に答えよ。

- (1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ を用いて表せ。
- (2) 辺 AC, BD 上にそれぞれ任意に点 E, F をとるとき、線分 EF の中点は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にあることを証明せよ。

- 2 xy 平面において、O を原点、P を第1象限内の点とする。このとき、次の間に答えよ。

- (1) 2点 O, P を頂点とし、 y 軸上に底辺を持つ二等辺三角形を考える。この二等辺三角形の周の長さが常に 2 となるような点 P の軌跡 T の方程式を求めよ。
- (2) T を (1) で求めた軌跡とし、 a を実数とする。このとき、軌跡 T と直線 $y = a(x - 1)$ が第1象限内で交点をもつような、 a の範囲を求めよ。

- 3 $f(x) = e^x - x$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 実数 x について $f(x) \geq 1$ であることを示せ。
- (2) t は実数とする。このとき、曲線 $y = f(x)$ と 2 直線 $x = t$, $x = t - 1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。
- (3) $S(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ。

- 4 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases} \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線を C とおく。このとき、
次の間に答えよ。

- (1) y を x の式で表せ。
- (2) x 軸と C で囲まれる図形 D の面積を求めよ。
- (3) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

5 次の問に答えよ.

- (1) 1, 2, 3 の種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ. 選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ.
- (2) 1 の数字を書いたカードを 3 枚, 2 の数字を書いたカードを 3 枚, 3 の数字を書いたカードを 3 枚, 計 9 枚用意する. この中から無作為に, 一度に 3 枚のカードを選んだとき, カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ.

解答例

- 1 (1) 2点 O, R はそれぞれ辺 AB, AD の中点であるから, 中点連結定理により

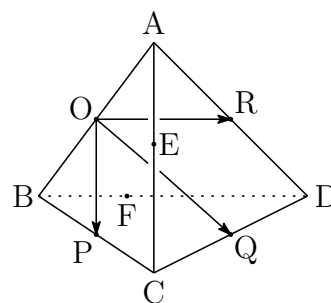
$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \quad \dots \textcircled{1}$$

2点 P, Q はそれぞれ辺 CB, CD の中点であるから, 中点連結定理により

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② より, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OR}$ であるから

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR}$$



- (2) 2点 O, P はそれぞれ辺 BA, BC の中点であるから, 中点連結定理により

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OP}$$

上式より, $\overrightarrow{AE} = s\overrightarrow{AC} = 2s\overrightarrow{OP}$ であるから (s は実数)

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA} + 2s\overrightarrow{OP}$$

① より, $\overrightarrow{BF} = t\overrightarrow{BD} = 2t\overrightarrow{OR}$ であるから (t は実数)

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OB} + 2t\overrightarrow{OR}$$

線分 EF の中点を M とすると, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ に注意して

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = s\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OR}$$

上式より, 点 M は平面 OPR 上にある.

(1) の結果より, 点 Q は平面 OPR 上にあるから, 点 M (線分 EF の中点) は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にある. ■

- 2** (1) 図の二等辺三角形 OPQ について、条件より

$$OP + PQ + QO = 2$$

点 P の座標を (x, y) とすると $(x > 0, y > 0)$,
点 Q の座標は $(0, 2y)$ であるから

$$OP = PQ = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad OQ = 2y$$

これらを条件式に代入すると

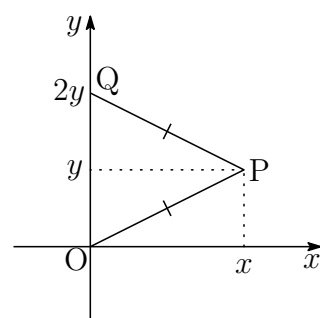
$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} + 2y = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - y$$

上の第 2 式の両辺を平方すると

$$x^2 + y^2 = (1 - y)^2 \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{1 - x^2}{2}$$

点 P は第 1 象限の点であるから、求める軌跡 T の方程式は

$$y = \frac{1 - x^2}{2} \quad (0 < x < 1)$$



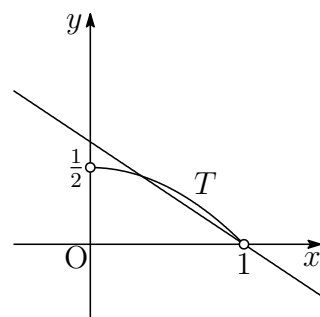
- (2) $f(x) = \frac{1 - x^2}{2}$ とおくと、 $f'(x) = -x$ より

$$f'(1) = -1$$

2 点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $(1, 0)$ を通る直線の傾きは $-\frac{1}{2}$

右の図から、軌跡 T と直線 $y = a(x - 1)$ が第 1 象限内で交点をもつとき

$$-1 < a < -\frac{1}{2}$$



3 (1) $f(x) = e^x - x$ より

$$f'(x) = e^x - 1$$

右の増減表から $f(x) \geq 1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

(2) (1) の結果から, 曲線 $y = f(x)$ は, x 軸の上側にあるから

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{t-1}^t f(x) dx = \int_{t-1}^t (e^x - x) dx \\ &= \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_{t-1}^t = e^t - e^{t-1} - t + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から $S(t) = \frac{e-1}{e}e^t - t + \frac{1}{2}$, $S'(t) = \frac{e-1}{e}e^t - 1$

$$S'(t) = 0 \text{ とすると } \frac{e-1}{e}e^t - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad e^t = \frac{e}{e-1}$$

$$e^a = \frac{e}{e-1}, \text{ すなわち, } a = \log \frac{e}{e-1} \text{ とおくと}$$

t	$\cdots$	a	$\cdots$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$	$\searrow$	$S(a)$	$\nearrow$

よって, 最小値は

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{e-1}{e}e^a - a + \frac{1}{2} \\ &= \frac{e-1}{e} \cdot \frac{e}{e-1} - \log \frac{e}{e-1} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \log \frac{e}{e-1} \\ &= \frac{1}{2} + \log(e-1) \end{aligned}$$

■

- 4 (1) $x = \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) より $0 \leq x \leq 1$, $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$ であるから

$$y = \sin 2t = 2 \sin t \cos t = 2x\sqrt{1-x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

- (2) (1) の結果より, 求める面積は

$$\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx = \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

- (3) 求める回転体の体積を V とすると $V = 2\pi \int_0^1 xy dx$

$$x = \sin t \text{ より } \frac{dx}{dt} = \cos t \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 1 \\ \hline t & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \sin 2t \cdot \cos t dt = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{\pi}{2} \left[t - \frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

バウムクーヘン型求積法

$a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x) \geq 0$ のとき, $y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$$

- 5 (1) $\{1, 1, 1\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 2, 2\}, \{3, 3, 3\}$

- (2) (1) の結果により, 目の組合せが $\{1, 1, 1\}, \{2, 2, 2\}, \{3, 3, 3\}$ であるのはそれぞれ 1 通り. 目の組合せが $\{1, 2, 3\}$ であるのは, $({}_3C_1)^3$ 通り.

よって, 求める確率は

$$\frac{3 \cdot 1 + ({}_3C_1)^3}{{}_9C_3} = \frac{3 + 27}{84} = \frac{5}{14}$$