

## 平成 18 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分

理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・  
発達科学 (人間環境 (理科系))・海事科学

## 問題 1 2 3 4 5

- 1 平面上に原点  $O$  から出る、相異なる 2 本の半直線  $OX$ ,  $OY$  をとり、 $\angle XOY < 180^\circ$  とする. 半直線  $OX$  上に  $O$  と異なる点  $A$  を、半直線  $OY$  上に  $O$  と異なる点  $B$  をとり、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  とおく. 次の問に答えよ.

- (1) 点  $C$  が  $\angle XOY$  の二等分線上にあるとき、ベクトル  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$  は実数  $t$  を用いて

$$\vec{c} = t \left( \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

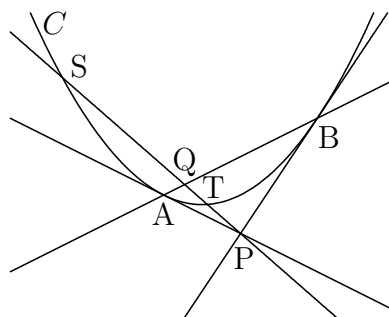
と表されることを示せ.

- (2)  $\angle XOY$  の二等分線と  $\angle XAB$  の二等分線の交点を  $P$  とおくとき、 $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$  を  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  および 3 辺の長さ  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ,  $|\vec{b} - \vec{a}|$  を用いて表せ.

- 2 行列  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  と、実数  $x, y, z, w$  を成分とする行列  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$  を考える. 次の問に答えよ.

- (1)  $X$  について関係式  $XA = AX$  が成立するための、 $x, y, z, w$  の条件を求めよ.
- (2)  $X$  が  $X^2 = A$  を満たすとき、 $XA = AX$  が成立することを示せ.
- (3)  $X^2 = A$  を満たす行列  $X$  をすべて求めよ.

- 3  $xy$  平面において放物線  $C: y = x^2$  と、下側にある点  $P(p, q)$  ( $q < p^2$ ) を考える.  $P$  を通るような  $C$  の 2 つの接線を考え、その接点をそれぞれ  $A, B$  とする. また、 $P$  を通る傾き  $m$  の直線が  $C$  と相異なる 2 点  $S, T$  で交わるとする.



点  $A, B$  の  $x$  座標をそれぞれ  $a, b$  とし、点  $S, T$  の  $x$  座標をそれぞれ  $s, t$  とする. 次の問に答えよ,

- (1)  $a + b, ab$  を  $p, q$  で表せ.
- (2)  $s + t, st$  を  $p, q, m$  で表せ.
- (3) 直線  $AB$  と直線  $ST$  の交点を  $Q$  とし、 $Q$  の  $x$  座標を  $u$  とする. 上図のように  $s < u < t < p$  となる場合について、等式

$$\frac{1}{PS} + \frac{1}{PT} = \frac{2}{PQ}$$

が成立することを示せ.

- 4  $xyz$  空間に 3 点  $P(1, 1, 0), Q(-1, 1, 0), R(-1, 1, 2)$  をとる. 次の問に答えよ.

- (1)  $t$  を  $0 < t < 2$  を満たす実数とするとき、平面  $z = t$  と、 $\triangle PQR$  の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ.
- (2)  $\triangle PQR$  を  $z$  軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ.

- 5  $\alpha = \frac{3 + \sqrt{7}i}{2}$  とする. ただし、 $i$  は虚数単位である. 次の問に答えよ.

- (1)  $\alpha$  を解にもつような 2 次方程式  $x^2 + px + q = 0$  ( $p, q$  は実数) を求めよ.
- (2) 整数  $a, b, c$  を係数とする 3 次方程式  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  について、解の 1 つは  $\alpha$  であり、また  $0 \leq x \leq 1$  の範囲に実数解を 1 つもつとする. このような整数の組  $(a, b, c)$  をすべて求めよ.

## 解答例

- 1 (1)  $\overrightarrow{OA'} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ,  $\overrightarrow{OB'} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ ,  $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$  とおくと, 四角形  $OA'C'B$  はひし形で,  $OC'$  は  $\angle A'OB'$  の二等分線である. よって, 実数  $t$  を用いて

$$\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OC'} = t \left( \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

- (2) 点  $P$  は  $\angle XOY$  の二等分線上の点であるから,  
(1) の結果を用いて

$$\overrightarrow{OP} = t \left( \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = \frac{t}{|\vec{a}|} \vec{a} + \frac{t}{|\vec{b}|} \vec{b}$$

点  $P$  は  $\angle XAB$  の二等分線上の点であるから,  
実数  $s$  を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + s \left( \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{|\vec{b} - \vec{a}|} \right) = \left\{ 1 + \left( \frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b} - \vec{a}|} \right) s \right\} \vec{a} + \frac{s}{|\vec{b} - \vec{a}|} \vec{b}$$

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  は 1 次独立であるから

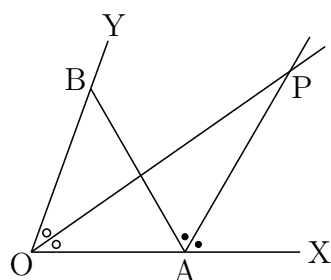
$$\frac{t}{|\vec{a}|} = 1 + \left( \frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b} - \vec{a}|} \right) s, \quad \frac{t}{|\vec{b}|} = \frac{s}{|\vec{b} - \vec{a}|}$$

上の第 2 式から,  $s = \frac{|\vec{b} - \vec{a}|}{|\vec{b}|} t$ . これを第 1 式に代入すると

$$\frac{t}{|\vec{a}|} = 1 + \left( \frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b} - \vec{a}|} \right) \frac{|\vec{b} - \vec{a}|}{|\vec{b}|} t$$

$$\text{したがって} \quad \left( \frac{1}{|\vec{a}|} + \frac{1}{|\vec{b}|} - \frac{|\vec{b} - \vec{a}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} \right) t = 1 \quad \text{ゆえに} \quad t = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|} \left( \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = \frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|} \quad \blacksquare$$



- 2** (1)  $XA = AX$  より,  $X(2A) = 2AX$  であるから

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x - \sqrt{3}z & y - \sqrt{3}w \\ \sqrt{3}x + z & \sqrt{3}y + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \sqrt{3}y & -\sqrt{3}x + y \\ z + \sqrt{3}w & -\sqrt{3}z + w \end{pmatrix}$$

上の (1, 1), (2, 2) 成分を比較して  $y = -z$

上の (1, 2), (2, 1) 成分を比較して  $w = x$

よって  $\mathbf{y} = -\mathbf{z}, \mathbf{w} = \mathbf{x}$

- (2)  $A = X^2$  であるとき  $XA = XX^2 = X^2X = AX$

- (3) (1), (2) の結論から  $X^2 = A \implies XA = XA \implies y = -z, w = x$

$X = \begin{pmatrix} x & -z \\ z & x \end{pmatrix}$  とおけるから,  $X^2 = A$  より

$$\begin{pmatrix} x^2 - z^2 & -2xz \\ 2xz & x^2 - z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

したがって  $x^2 - z^2 = \frac{1}{2}, 2xz = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots (*)$

上の 2 式から  $z$  を消去すると  $x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{4x}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$$16x^4 - 8x^2 - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (4x^2 + 1)(4x^2 - 3) = 0$$

ゆえに  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$  これを (\*) に代入して  $z = \pm \frac{1}{2}$  (複号同順)

よって  $\mathbf{X} = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

■

**3** (1)  $C: y = x^2$  より  $y' = 2x$

$C$  上の点  $A(a, a^2)$  における接線の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2$$

同様に,  $C$  上の点  $B(b, b^2)$  における接線の方程式は  $y = 2bx - b^2$

これらの2直線の交点は  $\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$

したがって  $p = \frac{a+b}{2}, q = ab$  よって  $a+b = 2p, ab = q$

別解  $C$  上の点  $(t, t^2)$  の点における接線  $y = 2tx - t^2$  が点  $(p, q)$  を通るとき

$$q = 2tp - t^2 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 2pt + q = 0$$

2解  $a, b$  と係数の関係により  $a+b = 2p, ab = q$

(2) 点  $P(p, q)$  を通り, 傾き  $m$  の直線は  $y = mx - mp + q \quad \cdots \textcircled{1}$

この直線と  $C: y = x^2$  の方程式から  $y$  を消去すると

$$x^2 - mx + mp - q = 0$$

2解  $s, t$  と係数の関係により  $s+t = m, st = mp - q$

(3) 2点  $A(a, a^2), B(b, b^2)$  を通る直線の方程式は, (1) の結果から

$$y = (a+b)x - ab \quad \text{すなわち} \quad y = 2px - q \quad \cdots \textcircled{2}$$

2直線  $AB, ST$  の交点  $Q$  の  $x$  座標  $u$  は, ①, ② より

$$2pu - q = mu - mp + q \quad \text{ゆえに} \quad u = \frac{2q - mp}{2p - m}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) の結果より} \quad \frac{1}{p-s} + \frac{1}{p-t} &= \frac{2p - (s+t)}{p^2 - (s+t)p + st} \\ &= \frac{2p - m}{p^2 - mp + (mp - q)} = \frac{2p - m}{p^2 - q} \end{aligned}$$

$$\text{また} \quad p - u = p - \frac{2q - mp}{2p - m} = \frac{2(p^2 - q)}{2p - m} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{p-u} = \frac{2p-m}{p^2-q}$$

$$\text{したがって} \quad \frac{1}{p-s} + \frac{1}{p-t} = \frac{2}{p-u}$$

$$\frac{PS}{p-s} = \frac{PT}{p-t} = \frac{PQ}{p-u} \quad \text{であるから} \quad \frac{1}{PS} + \frac{1}{PT} = \frac{2}{PQ}$$

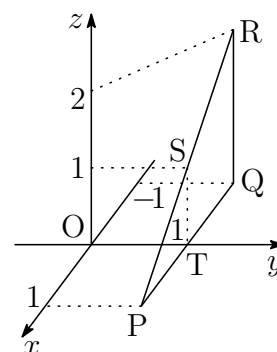


- 4 (1) 直線 QR と平面  $z = t$  の交点は  $(-1, 1, t)$   
 平面  $y = 1$  上の直線 PR の方程式は

$$y = 1, \quad x + z = 1$$

これに  $z = t$  を代入すると  $x = 1 - t$   
 よって、求める 2 つの端点の座標は

$$(-1, 1, t), \quad (1 - t, 1, t)$$



- (2)  $S(0, 1, 1)$ ,  $T(0, 1, 0)$  とし,  $\triangle PQR$  と平面  $z = t$  との断面で  $z$  軸からの距離を  $d$  とする.
- (i)  $0 \leq t \leq 1$  のとき,  $d$  は点  $(-1, 1, t)$  で最大値  $\sqrt{2}$  をとり, 点  $(0, 1, t)$  で最小値 1 をとる.
- (ii)  $1 \leq t \leq 2$  のとき,  $d$  は点  $(-1, 1, t)$  で最大値  $\sqrt{2}$  をとり, 点  $(1 - t, 1, t)$  で最小値  $\sqrt{(1 - t)^2 + 1^2} = \sqrt{t^2 - 2t + 2}$  をとる.
- (i), (ii) より, 求める回転体の体積を  $V$  とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^1 \{(\sqrt{2})^2 - 1^2\} dt + \int_1^2 \{(\sqrt{2})^2 - (t^2 - 2t + 2)\} dt \\ &= \left[ t \right]_0^1 + \left[ t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_1^2 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

よって  $V = \frac{5}{3}\pi$

補足 最後の定積分の計算は, 次のように計算することもできる.

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^1 \{(\sqrt{2})^2 - 1^2\} dt + \int_1^2 \{(\sqrt{2})^2 - 1 - (t - 1)^2\} dt \\ &= \int_0^2 dt - \int_1^2 (t - 1)^2 dt \\ &= 2 - \frac{1}{3} \left[ (t - 1)^3 \right]_1^2 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$



- 5** (1)  $\alpha$  は 2 次方程式 (\*)  $x^2 + px + q = 0$  の解であるから  $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$   
両辺の共役複素数をとると,  $p, q$  は実数であることに注意して

$$\overline{\alpha^2 + p\alpha + q} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\overline{\alpha})^2 + p\overline{\alpha} + q = 0$$

$\alpha, \overline{\alpha}$  は 2 次方程式 (\*) の解であるから, 解と係数の関係により

$$\frac{3 + \sqrt{7}i}{2} + \frac{3 - \sqrt{7}i}{2} = -p, \quad \frac{3 + \sqrt{7}i}{2} \times \frac{3 - \sqrt{7}i}{2} = q$$

ゆえに  $p = -3, q = 4$  よって  $x^2 - 3x + 4 = 0$

- (2) 実係数の 3 次方程式 (\*\*)  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  が  $\alpha$  を解にもつから

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

両辺の共役複素数をとると

$$\overline{\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\overline{\alpha})^3 + a(\overline{\alpha})^2 + b\overline{\alpha} + c = 0$$

$\alpha, \overline{\alpha}$  は 3 次方程式 (\*\*) の解であるから, (1) の結果から

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(x + \frac{c}{4}\right)(x^2 - 3x + 4) \\ &= x^3 + \left(\frac{c}{4} - 3\right)x^2 + \left(4 - \frac{3}{4}c\right)x + c \end{aligned}$$

方程式 (\*\*) の解が  $0 \leq x \leq 1$  にあり, これらの係数が整数であるから

$$c = 0 \text{ のとき } a = -3, b = 4$$

$$c = -4 \text{ のとき } a = -4, b = 7$$

よって  $(a, b, c) = (-3, 4, 0), (-4, 7, -4)$  ■