

平成 16 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分
理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
発達科学 (人間環境 (理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 行列 A, B, C を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

で定める。次の問に答えよ。

- (1) 積 ABC を計算せよ。
- (2) $BCAB = kB$ となる定数 k を求めよ。
- (3) 自然数 n に対して, $(ABC)^n$ を計算せよ。

2 $\alpha = \cos \frac{360^\circ}{5} + i \sin \frac{360^\circ}{5}$ とする。ただし, i は虚数単位である。100 個の複素数 $z_1, z_2, \dots, z_{100}$ を

$$z_1 = \alpha, \quad z_n = z_{n-1}^3 \quad (n = 2, \dots, 100)$$

で定める。次の問に答えよ。

- (1) z_5 を α を用いて表せ。
- (2) $z_n = \alpha$ となるような n の個数を求めよ。
- (3) $\sum_{n=1}^{100} z_n$ の値を求めよ。

3 a を正の定数とする。不等式 $a^x \geq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ。

4 t を正の実数とし, k を自然数とする。無限等比級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt(n-1)}$$

を考える。次の問に答えよ。

- (1) 上の無限級数の和を $f_k(t)$ とするとき, それを t と k を用いて表せ。
- (2) $x > 0$ のとき, $F_k(x) = \int_1^x f_k(t) dt$ を計算せよ。
- (3) $x > 0$ のとき, $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x)$ を求めよ。

- 5 次のようなゲームを考える．下のように1から9の数字が書かれている表を用意する．

5	2	8
1	9	3
7	4	6

一方，9枚のカードがあり1から9までの数字が1つずつ書かれている．これらのカードをよくまぜ，順に並べる．カードを並べた順に見て，カードに書いてある数字を表から消し，かわりに＊印を書き込む．この表で縦，横あるいは斜めのいずれかに＊印が3つはじめて並んだ時，その時点で表にある＊印の個数を得点とする．例えば，最初の4枚のカードが，順に5, 4, 6, 9であれば，以下のように変化する．

＊	2	8
1	9	3
7	4	6

＊	2	8
1	9	3
7	＊	6

＊	2	8
1	9	3
7	＊	＊

＊	2	8
1	＊	3
7	＊	＊

その結果，＊印がはじめて3つ並んだ．このとき，得点は4である．次の問に答えよ．

- (1) このゲームで起こり得る最小の得点を求めよ．また，得点が最小となる確率を求めよ．
- (2) このゲームで起こり得る最大の得点を求めよ．また，得点が最大となる確率を求めよ．

解答例

1 (1) 与えられた行列により

$$\begin{aligned} ABC &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{ar} & \mathbf{as} \\ \mathbf{cr} & \mathbf{cs} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(2) \quad BC = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$BCAB = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ra + sc \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (ra + sc)B$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{k} = \mathbf{ra} + \mathbf{sc}$$

(3) $X = ABC$ において, X をハミルトン・ケリーの定理に適用すると

$$X^2 - kX = 0 \quad \text{ゆえに} \quad X^2 = kX$$

$$\text{したがって} \quad X^n = k^{n-1}X$$

$$\text{よって} \quad (\mathbf{ABC})^n = (\mathbf{rs} + \mathbf{sc})^{n-1} \begin{pmatrix} \mathbf{ar} & \mathbf{as} \\ \mathbf{cr} & \mathbf{cs} \end{pmatrix}$$



- 2** (1) 条件から $\alpha^5 = 1$, $z_n = (z_1)^{3^{n-1}} = \alpha^{3^{n-1}}$
 よって $z_5 = \alpha^{3^4} = (\alpha^5)^{16} \alpha = \alpha$

- (2) $z_n = z_{n-1}^3$ より

$$\begin{aligned} z_1 &= \alpha, \quad z_2 = z_1^3 = \alpha^3, \quad z_3 = z_2^3 = \alpha^9 = \alpha^4, \\ z_4 &= z_3^3 = (\alpha^4)^3 = \alpha^{12} = \alpha^2, \quad z_5 = z_4^3 = (\alpha^2)^3 = \alpha = z_1 \end{aligned}$$

$\{z_n\}$ は周期 4 の循環数列であり, $z_n = \alpha$ を満たす n は上の結果から

$$n \equiv 1 \pmod{4}$$

100 以下の自然数でこれを満たす n の個数は **25**

- (3) $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ を利用する.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{100} z_n &= \sum_{k=1}^{25} (z_{4k-3} + z_{4k-2} + z_{4k-1} + z_{4k}) \\ &= \sum_{k=1}^{25} (\alpha + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2) \\ &= \sum_{k=1}^{25} (-1) = -\mathbf{25} \end{aligned}$$

■

3 (1) a, x は正であるから

$$\begin{aligned} a^x \geq x &\iff \log a^x \geq \log x \\ &\iff x \log a - \log x \geq 0 \end{aligned}$$

$f(x) = x \log a - \log x$ とおくと

$$f'(x) = \log a - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = \frac{1}{\log a}$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{\log a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

$f\left(\frac{1}{\log a}\right) \geq 0$ を満たせばよいから

$$\frac{1}{\log a} \cdot \log a - \log\left(\frac{1}{\log a}\right) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log(\log a) \geq -1$$

$$\text{したがって } \log a \geq \frac{1}{e} \quad \text{よって} \quad a \geq e^{\frac{1}{e}} \quad \blacksquare$$

4 (1) $t > 0, k$ は自然数であるから

$$f_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt(n-1)} = \frac{1}{1 - e^{-kt}}$$

$$(2) \quad f_k(t) = \frac{e^{kt}}{e^{kt} - 1} = \frac{1}{k} \cdot \frac{(e^{kt} - 1)'}{e^{kt} - 1} \text{ より}$$

$$F_k(x) = \int_1^x f_k(t) dt = \frac{1}{k} \left[\log(e^{kt} - 1) \right]_1^x = \frac{1}{k} \log \frac{e^{kx} - 1}{e^k - 1}$$

$$(3) \quad F_k(x) = \frac{1}{k} \log \frac{e^{kx} - 1}{e^k - 1} = \frac{1}{k} \log \frac{e^{kx}(1 - e^{-kx})}{e^k(1 - e^{-k})} = (x - 1) + \frac{1}{k} \log \frac{1 - e^{-kx}}{1 - e^{-k}}$$

$$x > 0 \text{ のとき } \quad \lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) = x - 1 \quad \blacksquare$$

- 5** (1) 得点が最小となるのは、縦に 3 個，横に 3 個，斜めに 3 個並ぶ場合がそれぞれ 3 通り，3 通り，2 通りで，その得点は **3 点**

このときの確率は $\frac{3+3+2}{{}_9C_3} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{21}}$

- (2) 最大の得点は **7 点** で，その 1 つ前の並びは次の 2 通りである．

*	*	8	5	*	*
*	9	*	*	9	*
7	*	*	*	*	6

よって，求める確率は

$$\frac{2}{{}_9C_6} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{42}}$$

