

平成 15 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題) 120 分

理・工・医 (医・保健 (検査技術科学))・農・
発達科学 (人間環境 (理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 次の問に答えよ。ただし、 i は虚数単位とする。

- (1) 複素数 z に対し、 $w = \frac{z-i}{z+i}$ とする。 z が実軸上を動くとき、複素数平面上で w を表す点が描く図形を求めよ。
- (2) 複素数 z とその共役複素数 $\bar{z}$ に対し、 $w_1 = \frac{z-i}{z+i}$, $w_2 = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$ とする。
 $z \neq \pm i$ のとき、複素数平面上で w_1 を表す点を P , w_2 を表す点を Q とする。
 P , Q と原点 O が同一直線上にあることを示せ。

2 三角形 ABC があり、 $AB = 2$, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $\angle CAB > \frac{\pi}{4}$ とする。点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とし、 $\angle CAH = \alpha$ とする。辺 AB の中点を M とする。線分 AM 上に A と異なる点 X をとる。3 点 A , X , H を通る円の中心を P , 半径を r , $\angle PAH = \theta$ とする。この円と直線 AC との交点で、 A と異なる点を Y とする。次の問に答えよ。

- (1) $\cos \theta$ を r を用いて表せ。
- (2) $AX + AY$ を r と α を用いて表せ。
- (3) X のとり方によらず、 $AX + AY$ が常に一定の値になるときの α の値を求めよ。

3 関数 $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{4}|x|}}{x^2 - 3x + 18}$ とする。次の問に答えよ。

- (1) $f(x)$ の極小値をすべて求めよ。
- (2) $f(x)$ の最小値を求めよ。ただし、必要ならば $e > 2.7$ を用いてよい。

4 $f(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数で、 $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$ をみたすとする。次の問に答えよ。

- (1) $\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = - \int_0^\pi f''(x) \sin x \, dx$ を示せ。
- (2) $f(x) = x(x - \pi)$ のとき、実数 a に対し

$$F(a) = \int_0^\pi \{af(x) - \sin x\}^2 \, dx$$

とする。 a を変化させたとき、 $F(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

5 座標平面上の点 (p, q) で, p と q がともに整数であるものを格子点という. 次の間に答えよ.

- (1) 自然数 n に対し, $p + 2q = n$, $p > 0$, $q > 0$ を満たす格子点 (p, q) の個数を a_n とする. a_n を求めよ.
- (2) 自然数 n に対し, $p + 2q < n$, $p > 0$, $q > 0$ をみたす格子点 (p, q) の個数を b_n とする. b_n を求めよ.
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2}$ を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad w = \frac{z-i}{z+i} \text{ より } (w-1)z = -i(w+1)$$

$$\text{このとき, } w \neq 1 \text{ に注意して } z = -i \cdot \frac{w+1}{w-1}, \quad \bar{z} = i \cdot \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1}$$

z は実数より, $z = \bar{z}$ であるから

$$-i \cdot \frac{w+1}{w-1} = i \cdot \frac{\bar{w}+1}{\bar{w}-1} \quad \text{整理すると} \quad w\bar{w} = 1 \quad \text{すなわち} \quad |w| = 1$$

よって, w を表す点は, 原点 O を中心とする半径 1 の円. ただし, $w \neq 1$

別解 z は実数であるから, $z = \tan \theta$ とおくと $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} w &= \frac{z-i}{z+i} = \frac{\tan \theta - i}{\tan \theta + i} = \frac{\sin \theta - i \cos \theta}{\sin \theta + i \cos \theta} \\ &= (\sin \theta - i \cos \theta)^2 = \left\{ \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right\}^2 \\ &= \cos(2\theta - \pi) + i \sin(2\theta - \pi) \end{aligned}$$

$$-2\pi < 2\theta - \pi < 0 \text{ であるから } |w| = 1, \quad w \neq 1$$

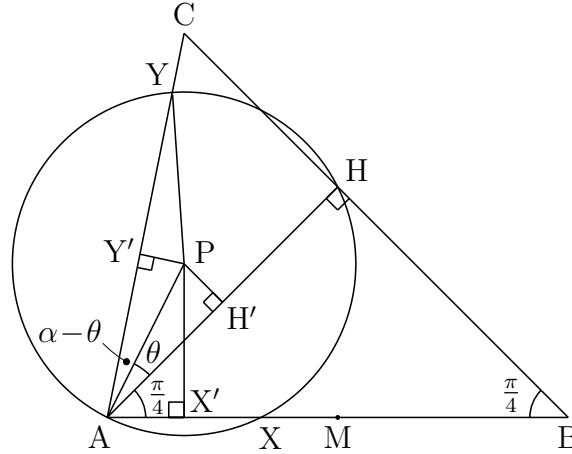
$$(2) \quad w_1 = \frac{z-i}{z+i}, \quad w_2 = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} \text{ より}$$

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} \cdot \frac{z+i}{z-i} = \frac{|z+i|^2}{|z-i|^2}$$

$\frac{w_2}{w_1}$ が実数であるから, 3点 $O(0)$, $P(w_1)$, $Q(w_2)$ は同一直線上にある. ■

- 2** (1) P から直線 AH に垂線 PH' を引くと, $AH = \sqrt{2}$ であるから

$$AH' = \frac{AH}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad AH' = r \cos \theta \quad \text{よって} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}r}$$



- (2) (1) の結果から $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{2r^2 - 1}}{\sqrt{2}r}$

点 P から線分 AX, AY にそれぞれ垂線 PX', PY' を引くと

$$\begin{aligned} AX &= 2AX' = 2r \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}r(\cos \theta - \sin \theta) \\ &= \sqrt{2}r \left(\frac{1}{\sqrt{2}r} - \frac{\sqrt{2r^2 - 1}}{\sqrt{2}r} \right) = 1 - \sqrt{2r^2 - 1} \\ AY &= 2AY' = 2r \cos(\alpha - \theta) = 2r(\cos \alpha \cos \theta + \sin \theta \sin \alpha) \\ &= \sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{2r^2 - 1} \cdot \sqrt{2} \sin \alpha \end{aligned}$$

したがって

$$AX + AY = 1 + \sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{2r^2 - 1}(\sqrt{2} \sin \alpha - 1)$$

- (3) X のとり方, すなわち, r のとり方に関係なく, $AX + AY$ が一定であるから, (2) の結果より

$$\sqrt{2} \sin \alpha - 1 = 0$$

このとき, $\alpha + \frac{\pi}{4} < \pi$ であるから $\alpha = \frac{\pi}{4}$



3 (1) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{4}|x|}}{x^2 - 3x + 18}$

(i) $x > 0$ のとき, $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{4}x}}{x^2 - 3x + 18}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x}(x^2 - 3x + 18) - e^{\frac{1}{4}x}(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 18)^2} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{4}x}(x^2 - 11x + 30)}{4(x^2 - 3x + 18)^2} = \frac{e^{\frac{1}{4}x}(x - 5)(x - 6)}{4(x^2 - 3x + 18)^2} \end{aligned}$$

(ii) $x < 0$ のとき, $f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{4}x}}{x^2 - 3x + 18}$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}(x^2 - 3x + 18) - e^{-\frac{1}{4}x}(2x - 3)}{(x^2 - 3x + 18)^2} \\ &= -\frac{e^{-\frac{1}{4}x}(x^2 + 5x + 6)}{4(x^2 - 3x + 18)^2} = -\frac{e^{-\frac{1}{4}x}(x + 2)(x + 3)}{4(x^2 - 3x + 18)^2} \end{aligned}$$

(i), (ii) より, $f(x)$ の増減は次のようになる.

x	...	-3	...	-2	...	0	...	5	...	6	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-		+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって, 極小値は

$$f(-3) = \frac{e^{\frac{3}{4}}}{36}, \quad f(0) = \frac{1}{18}, \quad f(6) = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{36}$$

(2) $e > 2.7 > \frac{8}{3}$ より $e^3 > \left(\frac{8}{3}\right)^3 = \frac{32}{27} \cdot 2^4 > 2^4$ ゆえに $e^{\frac{3}{4}} > 2$

したがって $\frac{e^{\frac{3}{2}}}{36} > \frac{e^{\frac{3}{4}}}{36} > \frac{2}{36}$ すなわち $f(6) > f(-3) > f(0)$

よって, 求める最小値は $f(0) = \frac{1}{18}$ ■

4 (1) $f(0) = 0, f(\pi) = 0$ のとき

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx &= - \int_0^\pi f(x) (\cos x)' \, dx \\
 &= - \left[f(x) \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x \, dx \\
 &= \int_0^\pi f'(x) (\sin x)' \, dx \\
 &= \left[f'(x) \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi f''(x) \sin x \, dx \\
 &= - \int_0^\pi f''(x) \sin x \, dx
 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x(x - \pi)$ より, $f(0) = 0, f(\pi) = 0, f''(x) = 2$ であるから,
(1) の結果に適用すると

$$\int_0^\pi f(x) \sin x \, dx = - \int_0^\pi 2 \sin x \, dx = 2 \left[\cos x \right]_0^\pi = -4$$

したがって

$$\begin{aligned}
 F(a) &= \int_0^\pi \{af(x) - \sin x\}^2 \, dx \\
 &= a^2 \int_0^\pi f(x)^2 \, dx - 2a \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx + \int_0^\pi \sin^2 x \, dx \\
 &= a^2 \int_0^\pi x^2(\pi - x)^2 \, dx - 2a \cdot (-4) + \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) \, dx \\
 &= a^2 \cdot \frac{2!2!}{5!} \pi^5 + 8a + \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi \\
 &= \frac{\pi^5}{30} a^2 + 8a + \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

よって, $F(a)$ を最小にする a の値は $a = -\frac{8}{2 \cdot \frac{\pi^5}{30}} = -\frac{120}{\pi^5}$

補足 定積分の公式

$$\int_\alpha^\beta (x - \alpha)^m (\beta - x)^n \, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$$

が利用できる¹ .



¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf 1

5 (1) 直線 $p + 2q = n$ の q 切片 $\frac{n}{2}$ に注目すると $a_n = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$

$$\text{よって} \quad a_n = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & (n \text{ が奇数}) \\ \frac{n-2}{2} & (n \text{ が偶数}) \end{cases}$$

$$(2) (1) \text{ の結果から } b_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor$$

(i) n が奇数のとき

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor \\ &= \left(\left\lfloor \frac{0}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \right) + \cdots + \left(\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \right) \\ &= 0 + 2 + \cdots + (n-3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \{0 + (n-3)\} = \frac{1}{4}(n-1)(n-3) \end{aligned}$$

(ii) n が偶数のとき

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^{n-2} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor \\ &= \left(\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor \right) + \cdots + \left(\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \right) \\ &= 1 + 3 + \cdots + (n-3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \{1 + (n-3)\} = \frac{1}{4}(n-2)^2 \end{aligned}$$

定理 a, n を整数とすると, 次式が成立する.

$$(A) \quad \left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+1}{n} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{a+n-1}{n} \right\rfloor = a$$

証明 連続する n 個の整数 $a, a+1, \dots, a+n-1$ 中で n の倍数を $a+q$ とする.

$q=0$ のとき (A) のすべての項が $\frac{a}{n}$ であるから, (A) の値は $\frac{a}{n} \cdot n = a$

$q \neq 0$ のとき $\left\lfloor \frac{a}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a+1}{n} \right\rfloor = \cdots = \left\lfloor \frac{a+q-1}{n} \right\rfloor = \frac{a+q}{n} - 1,$

$$\left\lfloor \frac{a+q}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a+q+1}{n} \right\rfloor = \cdots = \left\lfloor \frac{a+n-1}{n} \right\rfloor = \frac{a+q}{n}$$

(A) の値は $\left(\frac{a+q}{n} - 1 \right) q + \frac{a+q}{n} (n-q) = a$ 証終

(3) (i) n が奇数のとき

$$\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right), \quad \frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{3}{n} \right)$$

(ii) n が偶数のとき

$$\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \right), \quad \frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^2$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{4}$

