

平成14年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・
発達科学(人間環境(理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 0でない複素数 z に対して, $w = u + iv$ を

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

とするとき, 次の問に答えよ. ただし, u, v は実数, i は虚数単位である.

- (1) 複素数平面上で, z が単位円 $|z| = 1$ 上を動くとき, w はどのような曲線を描くか. u, v がみたす曲線の方程式を求め, その曲線を図示せよ.
- (2) 複素数平面上で, z が実軸からの偏角 α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ の半直線上を動くとき, w はどのような曲線を描くか. u, v がみたす曲線の方程式を求め, その曲線を図示せよ.

2 正の整数 n に対して, 連立不等式

$$\begin{cases} 0 < x \leq n \\ x \leq y \leq 3x \end{cases}$$

の表す領域を D_n とする. 次の問に答えよ.

- (1) 領域 D_n 内にある格子点 $P(x, y)$ の個数を S_n とする. S_n を n で表せ. ただし, 格子点とは x 座標と y 軸の両方が整数であるような点のことである.
- (2) 原点 $O(0, 0)$ を始点とし, 領域 D_n 内の格子点 $P(x, y)$ を終点とする位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は, ベクトル

$$\vec{v}_1 = (1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 2), \quad \vec{v}_3 = (1, 3)$$

と0以上の整数 m_1, m_2, m_3 を用いて,

$$\overrightarrow{OP} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3$$

と表せることを証明せよ.

- 3 正の実数 a, b に対して, 2つの曲線

$$C_1 : ay^2 = x^3 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

$$C_2 : bx^2 = y^3 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

の原点 O 以外の交点を P とする. 次の問に答えよ.

- (1) 交点 P の座標を求め, 2つの曲線 C_1, C_2 の概形を描け.
- (2) 2つの曲線 C_1, C_2 で囲まれる部分の面積を, a と b で表せ. また, この面積が一定値 S であるように a, b が動くとき, 点 P の軌跡の方程式を求めよ.

- 4 関数 $f(x)$ は任意の実数 x に対して定義されているとする. 次の問に答えよ.

- (1) $f(x)$ が $x = a$ において微分可能であることの定義を述べよ.
- (2) 次の2つの命題のうち正しいものを選び, それが正しい理由を示せ.
 - (i) $f(x)$ が $x = a$ において連続ならば, 必ず, $f(x)$ は $x = a$ において微分可能である.
 - (ii) $f(x)$ が $x = a$ において連続であっても, $f(x)$ は $x = a$ において微分可能であるとは限らない.
- (3) 関数 $f(x) = \cos x$ が $x = a$ において微分可能であることを, (1) で答えた定義を用いて証明せよ.

- 5 数字 $1, 2, \dots, N$ の書かれたカードが1枚ずつ N 枚入っている箱から, 元に戻さずに1枚ずつ k 枚のカードを引く試行を考える. ここで, $2 \leq k \leq N$ とする. 引いたカードの順に, 書かれている数字を $x_1, x_2, \dots, x_k$ とする. 次の問に答えよ.

- (1) $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, すなわち, k 枚のカードを数字の小さい順に引く確率 p を求めよ.
- (2) i は整数で, $2 \leq i \leq k$ をみたすとする.

$$\begin{cases} x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} \\ x_{i-1} > x_i \end{cases}$$

である確率, すなわち, k 枚のカードのうち, $i-1$ 枚目までは小さい順にカードを引き, i 枚目に初めて $i-1$ 枚目よりも数字の小さいカードを引く確率 q_i を求めよ.

- (3) N は5以上の整数で, $k = 5$ とする. $2 \leq i \leq 5$ をみたす各整数 i について上の(2)の事象が起こるとき, 得点 i 点が与えられるとする. それ以外のときの得点は0点とする. このとき, 得点の期待値を求めよ.

解答例

- 1** (1) $|z| = 1$ より, $\theta = \arg z$ とおくと ($0 \leq \theta < 2\pi$)

$$z = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \frac{1}{z} = \cos \theta - i \sin \theta$$

ゆえに $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \cos \theta$

よって $u = \cos \theta, \quad v = 0 \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$

すなわち $-1 \leq u \leq 1, \quad v = 0$

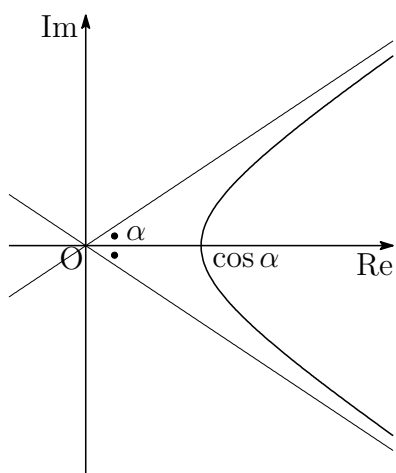
- (2) 条件より, $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ とおくと ($r > 0, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left\{ r(\cos \alpha + i \sin \alpha) + \frac{1}{r}(\cos \alpha - i \sin \alpha) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \alpha + \frac{i}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \alpha \end{aligned}$$

$w = u + iv$ より $u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \alpha, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \alpha$

r と α の範囲により, 上の 2 式から

$$\left(\frac{u}{\cos \alpha} \right)^2 - \left(\frac{v}{\sin \alpha} \right)^2 = 1, \quad u > 0$$



■

- 2** (1) D_n 内の直線 $x = k$ 上の格子点の個数は

$$3k - k + 1 = 2k + 1$$

したがって, D_n 内の格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^n (2k + 1) = n(n + 1) + n = \mathbf{n(n + 2)}$$

- (2) 命題「 D_n の格子点 $P(x, y)$ を終点とする位置ベクトル $\overrightarrow{OP}$ は, ベクトル

$$\vec{v}_1 = (1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 2), \quad \vec{v}_3 = (1, 3)$$

と 0 以上の整数 m_1, m_2, m_3 を用いて,

$$(*) \quad \overrightarrow{OP} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3$$

と表せる」を (A) とする.

- [1] $n = 1$ のとき, D_1 内の格子点は $(1, 1), (1, 2), (1, 3)$
 これらは, 順に, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ と表される.
 したがって, $n = 1$ のとき, (A) は成立する.

- [2] $n = k$ のとき, (A) が成立する, すなわち

$$(k, k), (k, k + 1), \dots, (k, 3k)$$

を終点とする点 P が $(*)$ のように表されると仮定すると

$$\begin{pmatrix} k \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k + 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} \quad (y = k, k + 1, \dots, 3k)$$

また

$$\begin{pmatrix} k \\ 3k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k \\ 3k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって, $n = k + 1$ のときも (A) が成立する.

- [1], [2] より, すべての自然数 n について, (A) は成立する. ■

3 (1) 2つの曲線

$$C_1 : ay^2 = x^3 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

$$C_2 : bx^2 = y^3 \quad (x \geq 0, y \geq 0)$$

の方程式をそれぞれ変形すると

$$a^3y^6 = x^9, \quad b^2x^4 = y^6$$

上の2式から, y を消去すると ($x > 0$)

$$a^3b^2x^4 = x^9 \quad \text{ゆえに} \quad x^5 = a^3b^2 \quad \text{すなわち} \quad x = a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{同様に } (y > 0) \quad y^5 = a^2b^3 \quad \text{すなわち} \quad y = a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{5}} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{よって} \quad \mathbf{P(a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}, a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{5}})}$$

(2) C_1, C_2 の方程式は, それぞれ

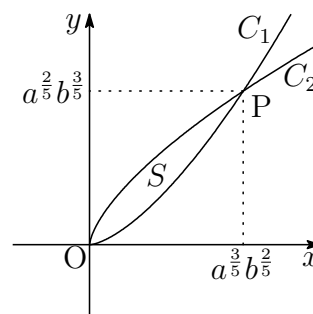
$$C'_1 : y = a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}, \quad C'_2 : y = b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}} (b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}) dx \\ &= \left[\frac{3}{5}b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{5}a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} \right]_0^{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}} = \frac{ab}{5} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } xy = ab$$

$$\text{したがって } S = \frac{1}{5}xy \quad \text{よって} \quad \mathbf{xy = 5S} \quad (x > 0, y > 0) \quad \blacksquare$$



- 4 (1) $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であることは、次式が存在することである.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

補足 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在することでもよい.

- (2) 正しい命題は (ii) である.

$f(x) = |x - a|$ とすると, $f(x)$ は $x = a$ で連続であるが,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h}{h} = -1, \\ \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

したがって, $\lim_{h \rightarrow a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ は存在しない, すなわち, $f(x)$ は $x = a$ で微分可能ではない.

- (3) $f(x) = \cos x$ より

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(a + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -\sin \left(a + \frac{h}{2} \right) \right\} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= -\sin a \end{aligned}$$

よって, 関数 $f(x)$ は, $x = a$ で微分可能である. ■

- 5 (1) N 枚のカードから k 枚のカードを引いて、引いた順に 1 列に並べる場合の総数は

$${}_N P_k \text{ (通り)}$$

N 枚のカードから k 枚のカードを引いて、引いた順に 1 列に並べたものが小さい順に並んでいる場合の総数は

$${}_N C_k \text{ (通り)}$$

よって、求める確率は $\frac{{}_N C_k}{{}_N P_k} = \frac{1}{k!}$

- (2) 取り出した i 枚が $x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1}$, $x_{i-1} > x_i$ を満たすのは, x_i を除く $x_1, x_2, \cdots, x_{i-1}$ を小さい順に並べ, x_i の場所を下の $i-1$ 個の仕切り (|) から 1 つ選べばよい.

$$\left| \begin{array}{c} x_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x_3 \end{array} \right| \cdots \left| \begin{array}{c} x_{i-2} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} x_{i-1} \end{array} \right|$$

その場合の数は $(i-1){}_N C_i$ (通り)

よって、求める確率は $q_i = \frac{(i-1)(i-1){}_N C_i}{{}_N P_i} = \frac{i-1}{i!}$

- (3) 求める期待値を E とすると, (2) の結果から

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=2}^5 i q_i = \sum_{i=2}^5 i \cdot \frac{i-1}{i!} = \sum_{i=2}^5 \frac{1}{(i-2)!} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

