

平成13年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)120分

理・工・医(医・保健(検査技術科学))・農・
発達科学(人間環境(理科系))・海事科学

問題 1 2 3 4 5

1 行列 A, B を

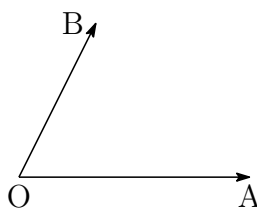
$$A = \begin{pmatrix} k & 4 \\ -1 & k-4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

とする。次の問に答えよ。

- (1) A の逆行列が存在しないような k の値を求めよ。
- (2) A の逆行列が存在するとき、 $AX = B$ となる $X = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ を a, b, k を用いて表せ。
- (3) A の逆行列が存在しないとき、 $AX = B$ をみたす行列 X があるような a, b の値を求めよ。

2 3点 O, A, B は、一直線上にない点とし、 $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ とする。また、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおく。このとき次の問に答えよ。

- (1) 点 P を $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BC}$ (t は実数) をみたす点とする。このとき、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}, t$ であらわせ。
- (2) 点 Q を $\overrightarrow{OQ} = 2s\overrightarrow{OA}$ (s は実数) をみたす点とする。 P と Q の中点を M とする。 t, s が $0 \leq t \leq 1, 0 \leq s \leq 1$ をみたしながら変化するとき、点 M の存在する範囲を図示せよ。



3 次の問に答えよ。

- (1) a, b, c を整数とする。 x に関する3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が有理数の解をもつならば、その解は整数であることを示せ。ただし、正の有理数は1以外の公約数をもたない2つの自然数 m, n を用いて $\frac{n}{m}$ と表せることを用いよ。
- (2) 方程式 $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ は、有理数の解をもたないことを背理法を用いて示せ。

4 関数

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\log x}{x} \quad (x > 0)$$

を考える．次の問に答えよ．ただし， e は自然対数 $\log x$ の底である．

(1) $f(x)$ の極値と変曲点を求め，グラフの概形を描け．ここで $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい．また，グラフと座標軸との交点の座標は求めなくてよい．

(2) 定積分 $\int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx$ の値を求めよ．

5 白球 3 個，赤球 2 個，青球 1 個の合計 6 個の球の入っている袋がある．最初に A 君が，次のルール (i)，(ii) に従って袋から球を 1 個または 2 個取り出す．次に B 君が同じルールに従って，袋に残った球を 1 個または 2 個取り出す．ただし，いったん取り出した球は元の袋には戻さないものとする．

(i) 取り出した 1 個目が赤球ならば，2 個目を取り出すことはできない．

(ii) 取り出した 1 個目が赤球以外ならば，さらに 1 個だけ取り出す．

白球は 1 点，赤球は 2 点，青球は 3 点とし，取り出した球の合計点を各自の得点とする．このとき次の問に答えよ．

(1) A 君と B 君の得点が同じになる確率 p_1 を求めよ．

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きくなる確率 p_2 を求めよ．

解答例

1 (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} k & 4 \\ -1 & k-4 \end{pmatrix}$ の逆行列が存在しないから、成分について

$$k(k-4) - 4 \cdot (-1) = (k-2)^2 = 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{k = 2}$$

(2) A の逆行列 $A^{-1} = \frac{1}{(k-2)^2} \begin{pmatrix} k-4 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \frac{1}{(k-2)^2} \begin{pmatrix} k-4 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(\mathbf{k-2})^2} \begin{pmatrix} (\mathbf{k-4})\mathbf{a} - 4 & \mathbf{k-4-4b} \\ \mathbf{a+k} & \mathbf{1+kb} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3) A の逆行列が存在しないとき, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$$AX = B \text{ より } \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -2 & -2b \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } \mathbf{a = -2, b = -\frac{1}{2}}$$

■

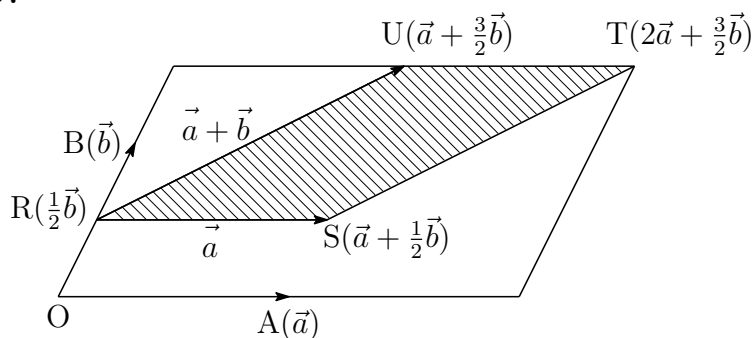
- 2 (1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BC}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB} &= t(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ \overrightarrow{OP} &= \vec{b} + t(2\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= 2t\vec{a} + (2t + 1)\vec{b}\end{aligned}$$

- (2) $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ} = 2s\overrightarrow{OA} = 2s\vec{a}$ について, 2 点 P, Q の中点 M は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\{2t\vec{a} + (2t + 1)\vec{b}\} + \frac{1}{2} \cdot 2s\vec{a} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b} + s\vec{a} + t(\vec{a} + \vec{b})\end{aligned}$$

$0 \leq s \leq 1$, $0 \leq t \leq 1$ であるから, 点 M の存在する範囲は, 下の図の斜線部分である.



- 3 (1) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が有理数の解 $\frac{n}{m}$ をもつとき (m, n は互いに素, m)

$$\left(\frac{n}{m}\right)^3 + a\left(\frac{n}{m}\right)^2 + b \cdot \frac{n}{m} + c = 0$$

したがって $\frac{n^3}{m} = -an^2 - bnm - cm^2$

上式の左辺は整数であるから $m = 1$

よって, 有理数の解をもつならば, その解は整数である.

- (2) 方程式 $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ が, 有理数の解をもつと仮定すると, (1) の結果から, その解は整数であり, これを p とすると

$$p^3 + 2p^2 + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 2 = -p^2(p + 2) \quad (*)$$

p^2 は 2 の因数であるから $p = \pm 1$

これらは, (*) を満たさないから, 方程式は有理数の解をもたない. ■

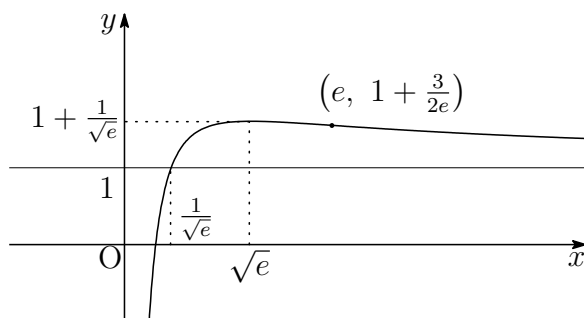
4 (1) $f(x) = 1 + \frac{1}{2x} + \frac{\log x}{x}$ より ($x > 0$)

$$f'(x) = \frac{1 - 2\log x}{2x^2}, \quad f''(x) = \frac{2(\log x - 1)}{x^3}$$

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−	−	−
$f''(x)$		−	−	−	0	+
$f(x)$	$\cdots$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	変曲点	$\searrow$

したがって、極大値 $f(\sqrt{e}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{e}}$, 変曲点 $\left(e, 1 + \frac{3}{2e}\right)$

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ より、グラフの概形は、次のようになる。



(2) $\int_{\frac{1}{e}}^e f(x) dx = \left[x + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^e = e + 1 - \frac{1}{e}$

■

5 (1) (i) A 君が「赤」(2点)のとき(確率 $\frac{2}{6}$)

B 君	赤	白白	白赤	白青	青白	青赤
得点	2点		3点	4点		5点
確率	$\frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$		$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4}$		$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$

(ii) A 君が「白白」(2点)のとき(確率 $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$)

B 君	赤	白赤	白青	青白	青赤
得点	2点	3点	4点		5点
確率	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$		$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$

(iii) A 君が「白赤」(3点)のとき(確率 $\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5}$)

B 君	赤	白白	白赤	白青	青白	青赤
得点	2点		3点	4点		5点
確率	$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$		$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}$		$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$

(iv) A 君が「白青, 青白」(4点)のとき(確率 $\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5}$)

B 君	赤	白白	白赤
得点	2点		3点
確率	$\frac{2}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$		$\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3}$

(v) A 君が「青赤」(5点)のとき(確率 $\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5}$)

B 君	赤	白白	白赤
得点	2点		3点
確率	$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$		$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$

(i)~(iii)の場合から

$$p_1 = \frac{2}{6} \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \right) + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$$

(2) (iii)~(iv)の場合から

$$p_2 = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} \right) + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$$

