

令和8年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)80分
 文・法・経済・経営・国際人間科学(グローバル文化・
 発達コミュニティ・環境共生(文科系)・子ども教育)・
 医(保健(理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

- 1 $y = x^3$ のグラフを C とする. C 上の点 $P(-1, -1)$ を通る直線 ℓ が C と相異なる3つの共有点 P, A, B をもつように動くとする. ℓ の方程式を $y = ax + t$ とする. 以下の問に答えよ.

- (1) t のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) A の x 座標を α とし, B の x 座標を β とする. $\alpha\beta$ と $\alpha^2 + \beta^2$ を t を用いて表せ.
- (3) A における C の接線を ℓ_A とし, B における C の接線を ℓ_B とする. ℓ_A と ℓ_B の交点 Q の軌跡を求め, 図示せよ.

- 2 1個のさいころを3回続けて投げ, 出た目の数を順に a, b, c とおく. 多項式 $f(x), g(x)$ を

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + 3x + b, \quad g(x) = x^2 + cx + 1$$

とし, $f(x)$ を $g(x)$ で割ったときの余りを $r(x)$ とおく. 以下の問に答えよ.

- (1) $r(x)$ が0である確率を求めよ.
- (2) $r(x)$ が0でなく, かつ, $r(x)$ の次数が0である確率を求めよ.
- (3) $r(0)$ が奇数である確率を求めよ.
- (4) $r(0)$ が奇数であり, かつ, $r(1)$ が偶数である確率を求めよ.

3 一辺の長さが1の正六角形 ABCDEF がある．以下では三角形および四角形は、すべての頂点が A, B, C, D, E, F のいずれかである三角形および四角形のみとする．三角形全体の集合を T とする．長さの等しい辺がちょうど3本ある四角形全体の集合を Q_1 とし、長さの等しい辺が2本ずつ2組ある四角形全体の集合を Q_2 とする．要素の個数が有限個である集合 S の要素の個数を $n(S)$ で表す．以下の問に答えよ．

- (1) $n(T)$ を求めよ．
- (2) $n(Q_1)$ および $n(Q_2)$ を求めよ．
- (3) 「四角形 $B_1B_2B_3B_4$ は三角形 $A_1A_2A_3$ を含む」とは

$$\{A_1, A_2, A_3\} \subset \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$$

が成り立つこととする．

各三角形 $X \in T$ に対し、集合 $S_1(X)$ と $S_2(X)$ を

$$S_1(X) = \{Y \mid Y \in Q_1 \text{ かつ } Y \text{ は } X \text{ を含む}\}$$

$$S_2(X) = \{Y \mid Y \in Q_2 \text{ かつ } Y \text{ は } X \text{ を含む}\}$$

と定める．各三角形 $X \in T$ に対して $n(S_1(X))$ と $n(S_2(X))$ を求めよ．

解答例

1 (1) $\ell: y = ax + t$ は点 $P(-1, -1)$ を通るから

$$-1 = a(-1) + t \quad \text{ゆえに} \quad a = t + 1$$

$C: y = x^3$ と $\ell: y = (t + 1)x + t$ から y を消去すると

$$x^3 - (t + 1)x - t = 0$$

$x + 1$ を因数に持つことに注意して

$$(x + 1)(x^2 - x - t) = 0 \quad \cdots (*)$$

2 次方程式 $x^2 - x - t = 0$ が -1 と異なる 2 つの実数解を持つから

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1(-t) > 0, \quad (-1)^2 - (-1) - t \neq 0$$

$$\text{よって} \quad -\frac{1}{4} < t < 2, \quad 2 < t$$

別解 定理 (神戸大文系 2025 年)¹

$f(x) = x^3 - (t + 1)x - t$ とすると, $f''(x) = 0$ の解は $x = 0$

$$f(0) = -t, \quad f'(0) = -t - 1, \quad a = 1 \quad \text{より} \quad f(0)^2 + \frac{4f'(0)^3}{27 \cdot 1} < 0$$

$$(-t)^2 + \frac{4(-t-1)^3}{27 \cdot 1} < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (4t+1)(t-2)^2 > 0$$

$$\text{これを解いて} \quad -\frac{1}{4} < t < 2, \quad 2 < t$$

(2) (*) より, 2 次方程式

$$x^2 - x - t = 0$$

の解が α, β であるから, 解と係数の関係により

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 1, \quad \alpha\beta = -t, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 1^2 - 2(-t) = 1 + 2t \end{aligned}$$

¹ http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_bun_2025.pdf (p.5)

(3) $f(x) = x^3$ とおくと $f'(x) = 3x^2$

ℓ_A は点 $A(\alpha, f(\alpha))$ を通り、傾き $f'(\alpha)$ の直線であるから

$$y = 3\alpha^2(x - \alpha) + \alpha^3 \quad \text{すなわち} \quad \ell_A : y = 3\alpha^2x - 2\alpha^3$$

同様に、 ℓ_B の方程式は $\ell_B : y = 3\beta^2x - 2\beta^3$

ℓ_A, ℓ_B の方程式から y を消去すると ($\alpha \neq \beta$)

$$3(\alpha^2 - \beta^2)x = 2(\alpha^3 - \beta^3) \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{3(\alpha + \beta)}$$

これを ℓ_A の方程式に代入すると

$$y = 3\alpha^2 \cdot \frac{2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{3(\alpha + \beta)} - 2\alpha^3 = \frac{2\alpha^2\beta^2}{\alpha + \beta}$$

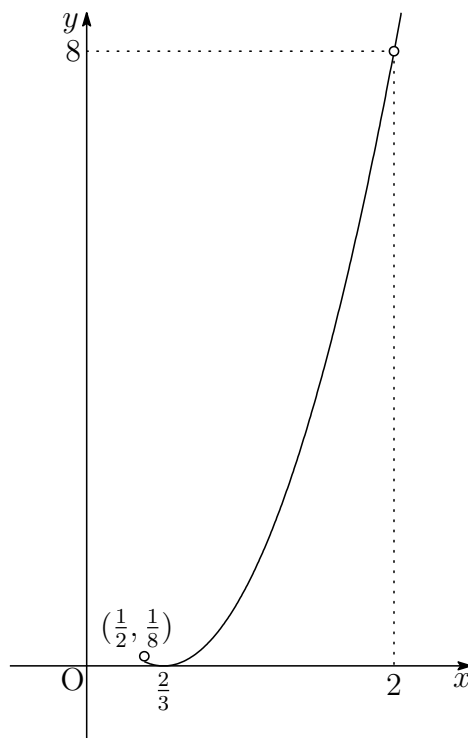
(2) の結果から、 $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -t$, $\alpha^2 + \beta^2 = 1 + 2t$ であるから、

交点 $Q(x, y)$ の座標は $x = \frac{2(1+t)}{3}$, $y = 2t^2 \quad \dots (**)$

(1) で求めた t の値の範囲より $\frac{1}{2} < x < 2$, $2 < x$

求める点 Q の軌跡の方程式は、(**) の 2 式から t を消去して

$$y = \frac{9}{2} \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 \quad \left(\frac{1}{2} < x < 2, 2 < x \right)$$



2 $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 3x + b$ を $g(x) = x^2 + cx + 1$ で割ることにより

$$f(x) = g(x)(2x + a - 2c) + \{1 - c(a - 2c)\}x + b - (a - 2c)$$

したがって $r(x) = \{1 - c(a - 2c)\}x + b - (a - 2c)$

(1) $r(x) = 0$ のとき $1 - c(a - 2c) = 0$, $b - (a - 2c) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$

上の 2 式から, $a - 2c$ を消去すると $bc = 1$

$b = 1$, $c = 1$ であるから, これを $\textcircled{1}$ に代入して $a = 3$

よって, 求める確率は $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

(2) $1 - c(a - 2c) = 0$, $b - (a - 2c) \neq 0 \dots \textcircled{2}$ であるから

$$c(a - 2c) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad c = 1, a - 2c = 1 \quad \text{すなわち} \quad a = 3$$

これを $\textcircled{2}$ に代入して $b \neq 1$

よって, 求める確率は $\frac{5}{6^3} = \frac{5}{216}$

(3) $r(0) = b - a + 2c$

$b - a$ が奇数, すなわち, a と b の偶奇が異なる場合の数は

$$3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18 \quad (\text{通り})$$

c は 6 通りであるから, 求める確率は

$$\frac{18 \cdot 6}{6^3} = \frac{1}{2}$$

(4) $r(0) = b - a + 2c$, $r(1) = 1 - c(a - 2c) + r(0)$

$r(0)$ は奇数, $r(1)$ は偶数より, 次の場合がある.

(i) a が偶数のとき, b は奇数.

(ii) a が奇数のとき, b, c はともに偶数.

(i), (ii) より, 求める確率は

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 6 + 3 \cdot 3 \cdot 3}{6^3} = \frac{3}{8}$$



- 3** (1) A, B, C, D, E, F の 6 個の頂点はどの 3 点も一直線上にはないから, 3 個の点を 1 組決めると三角形が 1 個作れる. 三角形全体の集合 T の個数は

$$n(T) = {}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

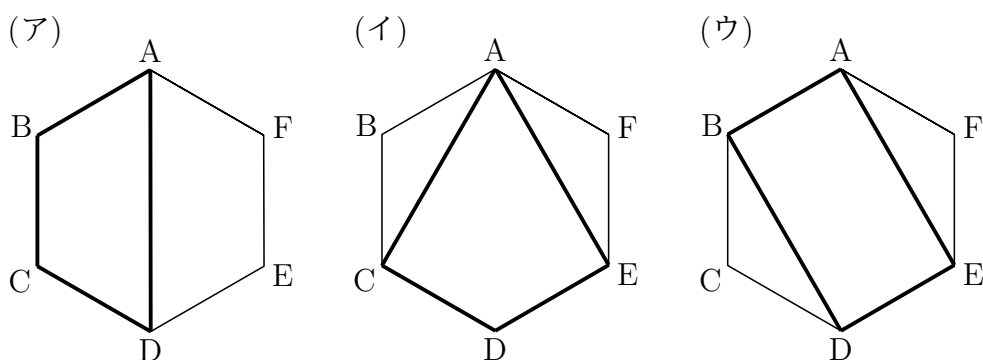
- (2) (1) の同様に, 四角形全体の集合を S とすると, その個数は

$$n(S) = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

(ア) 隣り合う 3 辺を共有する … 6 通り

(イ) 隣り合う 2 辺を共有する … 6 通り

(ウ) 向かい合う 2 辺を共有する … 3 通り



長さの等しい辺がちょうど 3 本ある四角形全体の集合 Q_1 は (ア)

長さの等しい辺が 2 本ずつ 2 組ある四角形全体の集合 Q_2 は (イ), (ウ)

よって $n(Q_1) = 6, n(Q_2) = 9$

(3) 三角形は次の(エ), (オ), (カ)がある.

- (エ) 2辺を共有する三角形(正三角形でない二等辺三角形)を T_1 とすると,
 四角形の A, B, C 以外の残りの頂点が D, F のとき $T_1 \subset Q_1$
 四角形の A, B, C 以外の残りの頂点が E のとき $T_1 \subset Q_2$

$$n(S_1(T_1)) = 2, \quad n(S_2(T_1)) = 1$$

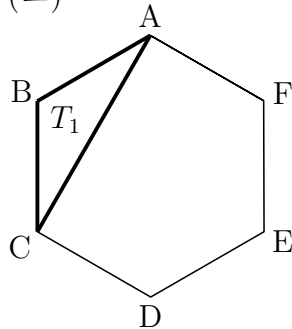
- (オ) 1辺を共有する三角形(直角三角形)を T_2 とすると,
 四角形の A, B, D 以外の残りの頂点が C のとき $T_2 \subset Q_1$
 四角形の A, B, D 以外の残りの頂点が E, F のとき $T_2 \subset Q_2$

$$n(S_1(T_2)) = 1, \quad n(S_2(T_2)) = 2$$

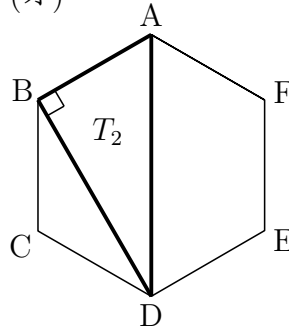
- (カ) 辺を共有しない三角形(正三角形)を T_3 とすると,
 四角形の A, C, E 以外の残りの頂点が B, D, F のとき $T_3 \subset Q_2$

$$n(S_1(T_3)) = 0, \quad n(S_2(T_3)) = 3$$

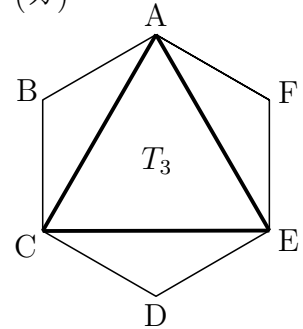
(エ)



(オ)



(カ)



したがって

$$n(S_1(X)) = \begin{cases} 2 & (X \text{ は正三角形でない二等辺三角形}) \\ 1 & (X \text{ は直角三角形}) \\ 0 & (X \text{ は正三角形}) \end{cases}$$

$$n(S_2(X)) = \begin{cases} 1 & (X \text{ は正三角形でない二等辺三角形}) \\ 2 & (X \text{ は直角三角形}) \\ 3 & (X \text{ は正三角形}) \end{cases}$$

