

令和7年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)80分
 文・法・経済・経営・国際人間科学(グローバル文化・
 発達コミュニティ・環境共生(文科系)・子ども教育)・
 医(保健(理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

1 a を実数とする. $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

- (1) 方程式 $f(x) = 0$ は $x = -1$ を解にもつとする. このとき, a の値を求め, 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ.
- (2) a の値を (1) で求めたものとする. 関数 $f(x)$ の極値を求めよ.
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ が異なる3つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ.

2 実数 a に対して, a を超えない最大の整数を k とするとき, $a - k$ を a の小数部分という. n を自然数とし, $a_n = \sqrt{n^2 + 1}$ とおく. 以下の問に答えよ.

- (1) $a_n < n + 1$ が成り立つことを示せ.
- (2) b_n を a_n の小数部分とする. b_n を n を用いて表せ.
- (3) b_n を (2) で定めたものとする. m, n を異なる2つの自然数とすると, $b_m \neq b_n$ であることを示せ.

3 1個のさいころを2回続けて投げるとき, 出た目の数を順に a, b とおく. 座標平面上の2点 A, B を

$$A \left(\cos \frac{a}{6}\pi, \sin \frac{a}{6}\pi \right), \quad B \left(\cos \frac{b+6}{6}\pi, \sin \frac{b+6}{6}\pi \right)$$

とし, 原点を O とする. 以下の問に答えよ.

- (1) 3点 O, A, B が一直線上にある確率を求めよ.
- (2) 3点 O, A, B が一直線上になく, かつ三角形 OAB の面積が $\frac{1}{4}$ 以下である確率を求めよ.
- (3) 2点 A, B 間の距離が1より大きい確率を求めよ.

解答例

- 1** (1) $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$ について, $x = -1$ は方程式 $f(x) = 0$ の解であるから

$$2 \cdot (-1)^3 + a \cdot (-1)^2 - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{a = 3}$$

$$\text{このとき} \quad f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 = (x+1)^2(2x-1)$$

$$\text{よって, } f(x) = 0 \text{ の解は} \quad \mathbf{x = -1, \frac{1}{2}}$$

- (2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ より

$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると} \quad x = -1, 0$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$$\text{よって} \quad \text{極大値 } \mathbf{f(-1) = 0}, \text{ 極小値 } \mathbf{f(0) = -1}$$

- (3) $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$ より

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax = 2x(3x + a)$$

$$f'(x) = 0 \text{ を解くと} \quad x = -\frac{a}{3}, 0$$

$f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつための条件は

$$-\frac{a}{3} \neq 0 \quad \text{かつ} \quad f\left(-\frac{a}{3}\right) f(0) < 0$$

$$\text{したがって} \quad a \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \left(\frac{a^3}{27} - 1\right) \cdot (-1) < 0$$

$$\text{すなわち} \quad a \neq 0, \quad a^3 > 27 \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{a > 3}$$



極展開

定理 1 2 次関数 $f(x)$ の x^2 の係数が a であるとき, $x = k$ を極として展開すると

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x - k) + a(x - k)^2 \quad (k \text{ は任意の定数})$$

証明 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと, $f'(x) = 2ax + b$ より

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= ak^2 + bk + c + (2ak + b)(x - k) + a(x - k)^2 \\ &= ax^2 + bx + c = f(x) \end{aligned}$$

【証終】

例えば, 定理 1 において, $f'(k) = 0$ のとき, $k = -\frac{b}{2a}$ であるから

$$f(k) = a \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left(-\frac{b}{2a} \right) + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

このとき, $f(x)$ は平方完成の式となる.

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

定理 2 3 次関数 $f(x)$ の x^3 の係数が a であるとき, $x = k$ を極として展開すると

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x - k) + \frac{1}{2}f''(k)(x - k)^2 + a(x - k)^3 \quad (k \text{ は任意の定数})$$

証明 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおくと

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

したがって

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= ak^3 + bk^2 + ck + d + (3ak^2 + 2bk + c)(x - k) \\ &\quad + \frac{1}{2}(6ak + 2b)(x - k)^2 + a(x - k)^3 \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + d = f(x) \end{aligned}$$

【証終】

n 次多項式についても数学 III で学習する部分積分法を使って証明できる¹.

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/N/TKdai/TKdai_2020.pdf (p.15 を参照)

定理 3 3次関数 $C: y = f(x)$ のグラフは変曲点 $M(k, f(k))$ に関して対称である。

証明 変曲点を $M(k, f(k))$ とすると, $f''(k) = 0$ であるから

$$f(x) = f(k) + f'(k)(x - k) + a(x - k)^3 \quad (a \text{ は } f(x) \text{ の } x^3 \text{ の係数}) \quad (1)$$

C 上の 2 点 $A(k + t, f(k + t))$, $B(k - t, f(k - t))$ について (t は任意の定数)

$$\begin{aligned} (k + t) + (k - t) &= 2k, \\ f(k + t) + f(k - t) &= \{f(k) + f'(k)t + at^3\} + \{f(k) - f'(k)t - at^3\} \\ &= 2f(k) \end{aligned}$$

したがって, A , B の中点は変曲点 M である. よって, C は変曲点 M に関して対称である. 証終

補足 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のとき, $f''(x) = 6ax + 2b$ より $k = -\frac{b}{3a}$ [終]

次に, 3次関数 $f(x)$ の増減を (1) を利用して調べてみる. $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = f'(k) + 3a(x - k)^2 \quad (2)$$

(i) $f'(k) = 0$ または $f'(k)$ が a と同符号, すなわち, $af'(k) \geq 0$ であるとき ($f(x)$ は極値をもたない), $f(x)$ は単調増加または単調減少であるから, このとき, 3次方程式 $f(x) = 0$ の実数解は 1 個である.

(ii) $f'(k)$ が a と異符号であるとき ($f(x)$ は極大値と極小値をもつ)

$$f'(k) = -3as^2 \quad (3)$$

とおくと ($s > 0$), (1), (2) は

$$\begin{aligned} f(x) &= f(k) - 3as^2(x - k) + a(x - k)^3 \\ f'(x) &= -3as^2 + 3a(x - k)^2 = 3a(x - k + s)(x - k - s) \end{aligned} \quad (4)$$

$f'(x) = 0$ とすると, $x = k \pm s$ であるから, $f(x)$ の極値は

$$f(k + s) = f(k) - 2as^3, \quad f(k - s) = f(k) + 2as^3 \quad (5)$$

上の 2 式および (3) より

$$\begin{aligned} f(k + s)f(k - s) &= f(k)^2 - 4a^2s^6 = f(k)^2 - 4a^2 \left\{ -\frac{f'(k)}{3a} \right\}^3 \\ &= f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} \end{aligned}$$

3 次方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数について

$$f(k+s)f(k-s) = f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} > 0 \text{ のとき } \text{実数解は 1 個}$$

$$f(k+s)f(k-s) = f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} = 0 \text{ のとき } \text{実数解は 2 個}$$

$$f(k+s)f(k-s) = f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} < 0 \text{ のとき } \text{実数解は 3 個}$$

(i), (ii) より, 3 次方程式の実数解の個数について, 次の定理が成立する.

3 次方程式の実数解の個数

定理 4 3 次方程式 $f(x) = 0$ の x^3 の係数を a , $f''(x) = 0$ の解を k とすると

$$af'(k) \geq 0 \text{ または } f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} > 0 \iff f(x) = 0 \text{ の実数解は 1 個}$$

$$af'(k) < 0, f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} = 0 \iff f(x) = 0 \text{ の実数解は 2 個}$$

$$f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} < 0 \iff f(x) = 0 \text{ の実数解は 3 個}$$

注意 $f(k)^2 + \frac{4f'(k)^3}{27a} < 0 \implies af'(k) < 0$

また, (4) に $x = k - 2s$, $k + 2s$ を代入すると

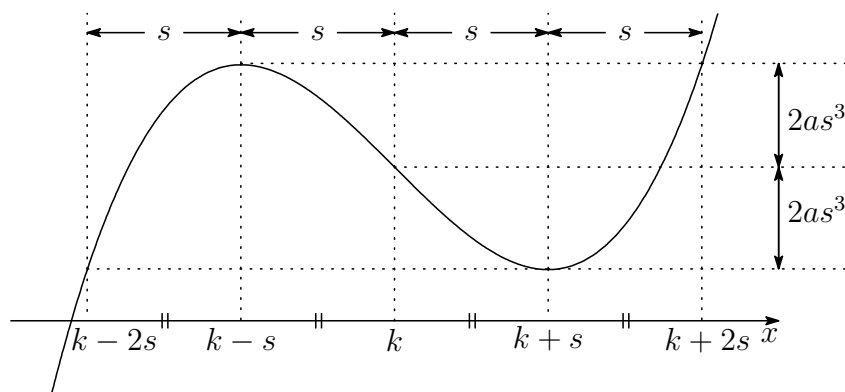
$$f(k - 2s) = f(k) - 2as^3, \quad f(k + 2s) = f(k) + 2as^3$$

したがって, 上の 2 式と (5) より, 次が成立する.

$$f(k - 2s) = f(k + s), \quad f(k + 2s) = f(k - s)$$

$a > 0$ のとき, $y = f(x)$ について, グラフの概形は次のようになる.

$(k, f(k))$ は変曲点, $f(k - s)$ は極大値, $f(k + s)$ は極小値である.



s は (3) より $s = \sqrt{-\frac{f'(k)}{3a}}$

補足 本題の $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 1$ について

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax, \quad f''(x) = 12x + 2a$$

$$f''(x) = 0 \text{ を解くと } x = -\frac{a}{6}$$

$$k = -\frac{a}{6} \text{ とおくと } f(x) = 2x^3 - 6kx^2 - 1, \quad f'(x) = 6x^2 - 12kx$$

$$\text{したがって } f(k) = -4k^3 - 1, \quad f'(k) = -6k^2$$

方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつための条件は、定理 4 より

$$\begin{aligned} f(k)^2 + \frac{4}{27 \cdot 2} f'(k)^3 &= (-4k^3 - 1)^2 + \frac{4}{27 \cdot 2} (-6k^2)^3 \\ &= 8k^3 + 1 < 0 \end{aligned}$$

$$\text{これを解いて } k = -\frac{a}{6} < -\frac{1}{2} \quad \text{よって } \mathbf{a > 3}$$

2 (1) n は自然数であるから, $n > 0$ より

$$\begin{aligned} n+1-a_n &= n+1-\sqrt{n^2+1} = \frac{(n+1)^2-(n^2+1)}{n+1+\sqrt{n^2+1}} \\ &= \frac{2n}{n+1+\sqrt{n^2+1}} > 0 \end{aligned}$$

したがって $n+1-a_n > 0$ よって $a_n < n+1$

(2) (1) の結果から $a_n - n < 1$

また, $a_n - n = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} > 0$ であるから

$$0 < a_n - n < 1, \quad a_n = n + (a_n - n) \quad \text{ゆえに} \quad b_n = a_n - n$$

よって $b_n = \sqrt{n^2+1} - n$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} b_n - b_m &= \sqrt{n^2+1} - n - (\sqrt{m^2+1} - m) \\ &= \sqrt{n^2+1} - \sqrt{m^2+1} - (n - m) \\ &= \frac{(n^2+1) - (m^2+1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{m^2+1}} + (m - n) \\ &= (m - n) \left(-\frac{m+n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{m^2+1}} + 1 \right) \\ &= \frac{(m-n)(\sqrt{n^2+1} - n + \sqrt{m^2+1} - m)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{m^2+1}} \\ &= \frac{(m-n)(b_n + b_m)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{m^2+1}} \end{aligned}$$

上式から, $m \neq n$ のとき, $0 < b_n < 1$, $0 < b_m < 1$ より

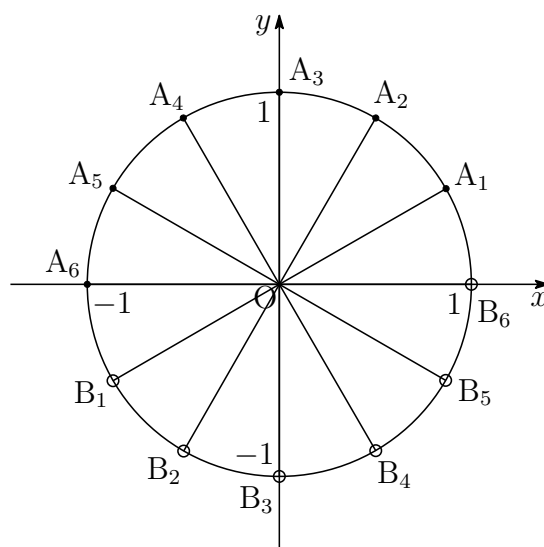
$$b_n - b_m \neq 0 \quad \text{よって} \quad b_m \neq b_n$$

■

- 3** (1) 2点 A, B を出た目 a, b ($a, b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) によって対応するそれぞれの点を A_a, B_b とすると, 下の図から 3 点 O, A, B が一直線上にあるのは

$$a = b$$

のときである. よって, 求める確率は $\frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$



- (2) $\vec{OA} = \left(\cos \frac{a}{6}\pi, \sin \frac{a}{6}\pi \right)$, $\vec{OB} = \left(-\cos \frac{b}{6}\pi, -\sin \frac{b}{6}\pi \right)$ より

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2} \left| \sin \frac{a}{6}\pi \cos \frac{b}{6}\pi - \cos \frac{a}{6}\pi \sin \frac{b}{6}\pi \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \sin \frac{a-b}{6}\pi \right| = \frac{1}{2} \sin \frac{|a-b|}{6}\pi \end{aligned}$$

条件をみたすとき $|a-b| = 1$ または $|a-b| = 5$
すなわち, 次の 12 組である.

$$(a, b) = (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), \\ (4, 5), (5, 4), (5, 6), (6, 5), (1, 6), (6, 1)$$

よって, 求める確率は $\frac{12}{6^2} = \frac{1}{3}$

- (3) 2 点 A, B 間の距離が 1 以下であるのは, 上の図から, 次の 6 組である

$$A_1B_5, A_1B_6, A_2B_6, A_5B_1, A_6B_1, A_6B_2$$

条件を満たすのは, 残りの $36 - 6 = 30$ 組である.

よって, 求める確率は $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

