令和６年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)80 分
文・法・経済・経営・国際人間科学 (グローバル文化・発達コミュニティ・環境共生 (文科系)・子ども教育)・医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

1 各項が正である数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．a_1 は関数

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 10x \qquad (x \geqq 0)$$

が最小値をとるときの x の値とする．a_{n+1} は関数

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 10a_n x \qquad (x \geqq 0)$$

が最小値をとるときの x の値とする．数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \log_{10} a_n$ で定める．以下の問に答えよ．

(1) a_1 と b_1 を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(3) b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(4) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(5) $\dfrac{a_1 a_2 a_3}{100}$ の値を求めよ．

2 n を自然数とする．以下の問に答えよ．

(1) 1 個のサイコロを投げて出た目が必ず n の約数となるような n で最小のものを求めよ．

(2) 1 個のサイコロを投げて出た目が n の約数となる確率が $\dfrac{5}{6}$ であるような n で最小のものを求めよ．

(3) 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の積が 20 の約数となる確率を求めよ．

3 a，b，c は実数で，$a \neq 0$ とする．放物線 C と直線 ℓ_1, ℓ_2 をそれぞれ

$$C : y = ax^2 + bx + c$$
$$\ell_1 : y = -3x + 3$$
$$\ell_2 : y = x + 3$$

で定める．ℓ_1，ℓ_2 がともに C に接するとき，以下の問に答えよ．

(1) b を求めよ．また c を a を用いて表せ．

(2) C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき，$\dfrac{1}{a}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) C と ℓ_1 の接点を P，C と ℓ_2 の接点を Q，放物線 C の頂点を R とする．a が (2) の条件を満たしながら動くとき，△PQR の重心 G の軌跡を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $y=\dfrac{1}{3}x^3-10x$ を微分すると　$y'=x^2-10$

$x \geqq 0$ における増減は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{10}$	$\cdots$
y'		$\cdots$	0	$\cdots$
y	0	$\searrow$	最小	$\nearrow$

よって　　$a_1=\boldsymbol{\sqrt{10}}$，　$b_1=\log_{10}a_1=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) $y=\dfrac{1}{3}x^3-10a_nx$ を微分すると　$y'=x^2-10a_n$

$x \geqq 0$ における増減は，次のようになる $(a_n>0)$．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{10a_n}$	$\cdots$
y'		$\cdots$	0	$\cdots$
y	0	$\searrow$	最小	$\nearrow$

よって　　$\boldsymbol{a_{n+1}=\sqrt{10a_n}}$

(3) (2) の結果から

$$\log_{10}a_{n+1}=\log_{10}\sqrt{10a_n}=\frac{1}{2}\log_{10}a_n+\frac{1}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{b_{n+1}=\dfrac{1}{2}b_n+\dfrac{1}{2}}$

(4) (3) の結果から　$b_{n+1}-1=\dfrac{1}{2}(b_n-1)$

したがって，$\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1=-\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ である．

$$b_n-1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{b_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

(5) (4) の結果から　$b_1+b_2+b_2=3-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{17}{8}$

$$\log_{10}a_1+\log_{10}a_2+\log_{10}a_3=\frac{17}{8}\quad \text{ゆえに}\quad a_1a_2a_3=10^{\frac{17}{8}}$$

よって　　$\dfrac{a_1a_2a_3}{100}=\dfrac{10^{\frac{17}{8}}}{10^2}=\boldsymbol{10^{\frac{1}{8}}}$ ■

2 (1) サイコロの目 1, 2, 3, 4, 5, 6 の最小公倍数は　60
よって，求める最小の数は　**60**

(2) n の約数となるサイコロの目の集合を A とし，A の大きさ (要素の個数) を $|A|$ とする．$1 \in A$，$2 \notin A \Rightarrow 6 \notin A$，$3 \notin A \Rightarrow 6 \notin A$，$\{2,\ 3\} \subset A \Rightarrow 6 \in A$ に注意すると，$|A| = 5$ となる A は次の 2 通り．

$$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6\} \quad \text{または} \quad A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$$

これを満たす n で最小の数は　**12**

(3) $20 = 2^2 \cdot 5$ より　$A = \{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$
このとき，5 の目が出るのは 1 回までとなる．

- 5 の目が出ないときの組み合わせは

$$\{1,\ 1,\ 1\},\ \{1,\ 1,\ 2\},\ \{1,\ 1,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 2\}$$

その確率は　$\left(1 + 3 \times \dfrac{3!}{1!2!}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{10}{216}$

- 5 の目が 1 回出る組み合わせは

$$\{1,\ 1,\ 5\},\ \{1,\ 2,\ 5\},\ \{1,\ 4,\ 5\},\ \{2,\ 2,\ 5\}$$

その確率は　$\left(2 \times \dfrac{3!}{1!2!} + 2 \times 3!\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \dfrac{18}{216}$

これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{10}{216} + \frac{18}{216} = \boldsymbol{\frac{7}{54}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) ℓ_1，ℓ_2 がともに C に接するとき

$$\begin{aligned} C' &: y = ax^2 + (b+1)x + c \\ \ell_1' &: y = -2x + 3 \\ \ell_2' &: y = 2x + 3 \end{aligned}$$

とすると，ℓ_1'，ℓ_2' はともに C' に接する．ℓ_1'，ℓ_2' は y 軸対称より，C' も y 軸対称であるから

$$b + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b = -1}$$

C' と ℓ_1' から y を消去して，整理すると

$$ax^2 + 2x + c - 3 = 0 \tag{$*$}$$

上の 2 次方程式は重解をもつから，係数について

$$D/4 = 1^2 - a(c-3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{c = \frac{1}{a} + 3}$$

(2) (1) の結果から C の方程式は　$y = ax^2 - x + \dfrac{1}{a} + 3$

C は x 軸と 2 点で交わるから，係数について

$$D = (-1)^2 - 4a\left(\frac{1}{a} + 3\right) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 1 + 4a < 0$$

上の第 2 式の両辺に $\dfrac{1}{a^2}$ を掛けると

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} + 4\right) < 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-4 < \frac{1}{a} < 0}$$

(3) C' と ℓ_1' の接点を P'，C' と ℓ_2' の接点を Q' とする．

P' の x 座標は，$(*)$ から　$x = -\dfrac{2}{2a} = -\dfrac{1}{a}$

Q' は P' と y 軸対称であるから，その x 座標は　$x = \dfrac{1}{a}$

P と P'，Q と Q' の x 座標は一致するから

$$C : y = ax^2 - x + \frac{1}{a} + 3 = a\left(x - \frac{1}{2a}\right)^2 + \frac{3}{4a} + 3$$

これより，3 点 P，Q，R の座標を得る．

$$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{a},\ \frac{3}{a} + 3\right),\quad \mathrm{Q}\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{a} + 3\right),\quad \mathrm{R}\left(\frac{1}{2a},\ \frac{3}{4a} + 3\right)$$

したがって，$\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 G の座標は　$\left(\dfrac{1}{6a},\ \dfrac{19}{12a} + 3\right)$

(2) の結果から　$-\dfrac{2}{3} < \dfrac{1}{6a} < 0$

$$\frac{19}{12a} + 3 = \frac{19}{2}\cdot\frac{1}{6a} + 3$$

よって，点 G の軌跡は　**直線** $\boldsymbol{y = \dfrac{19}{2}x + 3\ \left(-\dfrac{2}{3} < x < 0\right)}$　■