令和５年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)80 分
文・法・経済・経営・国際人間科学 (グローバル文化・発達コミュニティ・環境共生 (文科系)・子ども教育)・医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

1 a，b を実数とする．整式 $f(x)$ を $f(x) = x^2 + ax + b$ で定める．以下の問に答えよ．

(1) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の解をもつための a と b がみたすべき必要十分条件を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもち，それが共に -1 より大きく，0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．

(3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ の 2 つの解の実部が共に -1 より大きく，0 より小さくなるような点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面上に図示せよ．ただし，2 次方程式の重解は 2 つと数える．

2 A，B の 2 人が，はじめに，A は 2 枚の硬貨を，B は 1 枚の硬貨を持っている．2 人は次の操作 (P) を繰り返すゲームを行う．

(P) 2 人は持っている硬貨すべてを同時に投げる．それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の枚数を数え，その枚数が少ない方が相手に 1 枚の硬貨を渡す．表が出た硬貨の枚数が同じときは硬貨のやりとりは行わない．

操作 (P) を繰り返し，2 人のどちらかが持っている硬貨の枚数が 3 枚となった時点でこのゲームは終了する．操作 (P) を n 回繰り返し行ったとき，A が持っている硬貨の枚数が 3 枚となってゲームが終了する確率を p_n とする．ただし，どの硬貨も 1 回投げたとき，表の出る確率は $\frac{1}{2}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) p_1 の値を求めよ．

(2) p_2 の値を求めよ．

(3) p_3 の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a を正の実数とする．2 つの円

$$C_1 : x^2 + y^2 = a, \quad C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$$

が異なる 2 点 A，B で交わっているとする．直線 AB が x 軸および y 軸と交わる点をそれぞれ $(p,\ 0)$，$(0,\ q)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) p，q の値を a を用いて表せ．

(3) $p,\ q$ の値が共に整数となるような a の値をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x^2+ax+b$ より　$f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+b-\dfrac{a^2}{4}$

$f(x)=0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき

$$-\frac{a}{2}>0,\quad f(0)=b>0,\quad b-\frac{a^2}{4}<0$$

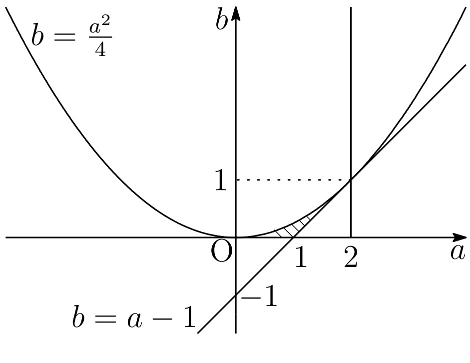
よって，求める必要十分条件は　$\boldsymbol{a<0,\ b>0,\ b<\dfrac{a^2}{4}}$

(2) 与えられた条件を満たすとき

$$-1<-\frac{a}{2}<0,\quad f(0)=b>0,\quad f(-1)=1-a+b>0,\quad b-\frac{a^2}{4}<0$$

したがって　$0<a<2,\ \ b>0,\ \ b>a-1,\ \ b<\dfrac{a^2}{4}$

よって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は，図の斜線部分で境界線を含まない．



(3) (i) $f(x)=0$ が実数解をもつ，すなわち，$a^2-4b \geqq 0$ のとき

$$-1 < -\frac{a}{2} < 0, \quad f(0)=b>0, \quad f(-1)=1-a+b>0$$

したがって　$0<a<2,\ \ b>0,\ \ b>a-1,\ \ b \leqq \dfrac{a^2}{4}$

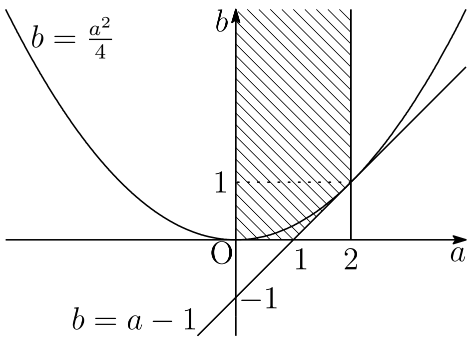
(ii) $f(x)=0$ が虚数解をもつ，すなわち，$a^2-4b<0$ のとき
$f(x)=0$ の虚数解 $\dfrac{-a \pm \sqrt{-a^2+4b}\,i}{2}$ の実部 $-\dfrac{a}{2}$ が -1 より大きく，0 より小さいから

$$-1 < -\frac{a}{2} < 0 \quad \text{すなわち} \quad 0<a<2$$

したがって　$0<a<2,\ \ b>\dfrac{a^2}{4}$

(i)，(ii) から　$0<a<2,\ \ b>0,\ \ b>a-1$

よって，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は，図の斜線部分で境界線を含まない．



■

$\boxed{\mathbf{2}}$ 2枚の硬貨と1枚の硬貨を投げたとき，表の出る枚数をそれぞれX，Yとすると

X	0	1	2	計
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Y	0	1	計
$P(Y)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

したがって

$$\begin{aligned}P(X<Y)&=P(X=0)P(Y=1)\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\\P(X=Y)&=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\\P(X>Y)&=1-\{P(X<Y)+P(X=Y)\}\\&=1-\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Aがm枚の硬貨を持っているとき，操作(P)によって硬貨の枚数がn枚になる確率を$(m,\ n)$と表すと

$$\begin{aligned}(2,\ 1)=(1,\ 2)=P(X<Y)=\frac{1}{8}\\(2,\ 2)=(1,\ 1)=P(X=Y)=\frac{3}{8}\\(2,\ 3)=(1,\ 0)=P(X>Y)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(1) $p_1=(2,\ 3)=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) $p_2=(2,\ 2)(2,\ 3)=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{3}{16}}$

(3) $p_3=(2,\ 2)(2,\ 2)(2,\ 3)+(2,\ 1)(1,\ 2)(2,\ 3)=\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{5}{64}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $C_1 : x^2 + y^2 = a\ (a > 0)$

$C_2 : x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$ より　$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$

C_1，C_2 の中心間の距離は　$\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

C_1，C_2 の半径は，それぞれ　$\sqrt{a}$，$\sqrt{10}$

C_1，C_2 が異なる 2 点で交わるから

$$|\sqrt{a} - \sqrt{10}| < \sqrt{13} < \sqrt{a} + \sqrt{10}$$

したがって　$\sqrt{13} - \sqrt{10} < \sqrt{a} < \sqrt{13} + \sqrt{10}$

よって　$\boldsymbol{23 - 2\sqrt{130} < a < 23 + 2\sqrt{130}}$

(2) C_1，C_2 の交点を通る直線は，これらの方程式から $x^2 + y^2$ を消去して

$$6x + 4y - a - 3 = 0$$

この直線が $(p,\ 0)$，$(0,\ q)$ を通るから

$$6p - a - 3 = 0,\quad 4q - a - 3 = 0$$

よって　$\boldsymbol{p = \dfrac{a+3}{6},\ q = \dfrac{a+3}{4}}$

(3) (2) の結果から　$6p = 4q = a + 3$

$a + 3$ は 6 の倍数かつ 4 の倍数，すなわち，12 の倍数である．

$2\sqrt{130} = \sqrt{520}$，$22 < \sqrt{520} < 23$ であるから，(1) の結果について

$$0 < 23 - \sqrt{520} < 1,\quad 45 < 23 + \sqrt{520} < 46$$

したがって　$0 < a + 3 < 49$　ゆえに　$a + 3 = 12,\ 24,\ 36,\ 48$

よって　$\boldsymbol{a = 9,\ 21,\ 33,\ 45}$　■