令和４年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)80 分
文・法・経済・経営・国際人間科学 (グローバル文化・発達コミュニティ・環境共生 (文科系)・子ども教育)・医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

1 a を正の実数とする．$x \geqq 0$ のとき $f(x)=x^2$，$x<0$ のとき $f(x)=-x^2$ とし，曲線 $y=f(x)$ を C，直線 $y=2ax-1$ を ℓ とする．以下の問に答えよ．

(1) C と ℓ の共有点の個数を求めよ．

(2) C と ℓ がちょうど 2 個の共有点をもつとする．C と ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ．

2 a を正の実数とし，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=\sqrt{a}\,x-2\sqrt{a}$ が異なる 2 点 P，Q で交わっているとする．線分 PQ の中点を R$(s,\ t)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) $s,\ t$ の値を a を用いて表せ．

(3) a が (1) で求めた範囲を動くときに s のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) t の値を s を用いて表せ．

3 $a,\ b$ を実数とし，$1<a<b$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $x,\ y,\ z$ を 0 でない実数とする．$a^x=b^y=(ab)^z$ ならば $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ であることを示せ．

(2) $m,\ n$ を $m>n$ をみたす自然数とし，$\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{5}$ とする．$m,\ n$ の値を求めよ．

(3) $m,\ n$ を自然数とし，$a^m=b^n=(ab)^5$ とする．b の値を a を用いて表せ．

解答例

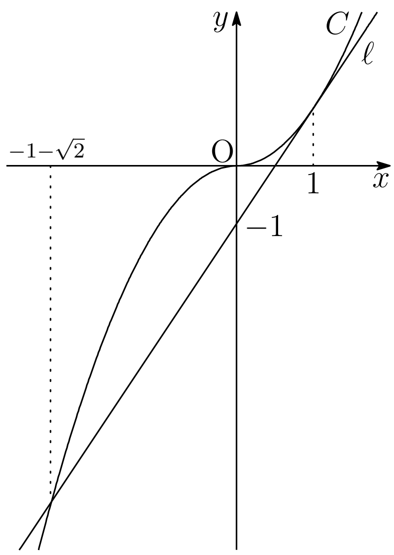
$\boxed{1}$ (1) C と ℓ は，$x<0$ の区間で共有点を 1 個もつ．
$x \geqq 0$ において，C と ℓ の方程式から y を消去して整理すると

$$x^2 - 2ax + 1 = 0$$

C と ℓ が接するとき，係数について

$$D/4 = a^2 - 1 = 0$$

$a>0$ より，$a=1$ のとき，$0 \leqq x$ において，C と ℓ は接する (右図)．



ℓ の y 切片 -1 に注意して

$\boldsymbol{0<a<1}$	のとき	**1 個，**
$\boldsymbol{a=1}$	のとき	**2 個，**
$\boldsymbol{1<a}$	のとき	**3 個**

(2) C と ℓ がちょうど 2 個の共有点をもつとき，(1) の結果から，$a=1$ であるから，$x<0$ において，$C: y=-x^2$ と $\ell: y=2x-1$ の共有点の x 座標は

$$-x^2 = 2x-1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2+2x-1=0$$

$x<0$ に注意して，これを解くと　$x=-1-\sqrt{2}$

$\alpha = -1-\sqrt{2}$ とし，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{0} \{-x^2-(2x-1)\}\,dx + \int_0^1 \{x^2-(2x-1)\}\,dx \\
&= \int_0^{\alpha} \{(x+1)^2-2\}\,dx + \int_0^1 (x-1)^2\,dx \\
&= \Big[\,\frac{1}{3}(x+1)^3 - 2x\,\Big]_0^{\alpha} + \Big[\,\frac{1}{3}(x-1)^3\,\Big]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\{(-\sqrt{2})^3 - 1^3\} + 2(1+\sqrt{2}) + \frac{1}{3} \\
&= \boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{2} + 2}
\end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 円 $C: x^2+y^2=1$ と直線 $\ell: y=\sqrt{a}\,(x-2)$ の方程式から y を消去すると

$$x^2+a(x-2)^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad (a+1)x^2-4ax+4a-1=0 \qquad (*)$$

C と ℓ が異なる 2 点で交わるから，係数について $(a>0)$

$$D/4=(-2a)^2-(a+1)(4a-1)=1-3a>0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{0<a<\frac{1}{3}}$$

(2) P，Q の x 座標を s_1，s_2 とすると，2 次方程式 $(*)$ の解と係数の関係により

$$s_1+s_2=\frac{4a}{a+1} \quad \text{ゆえに} \quad s=\frac{s_1+s_2}{2}=\boldsymbol{\frac{2a}{a+1}}$$

これを $\ell: y=\sqrt{a}\,(x-2)$ の方程式に代入して

$$t=\sqrt{a}\left(\frac{2a}{a+1}-2\right)=\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{a}}{a+1}}$$

(3) $s=\dfrac{2a}{a+1}$ より　$s=-\dfrac{2}{a+1}+2.$　$0<a<\dfrac{1}{3}$ より　$1<a+1<\dfrac{4}{3}$

$$\frac{3}{4}<\frac{1}{a+1}<1 \quad \text{ゆえに} \quad -2<-\frac{2}{a+1}<-\frac{3}{2}$$

したがって　$0<-\dfrac{2}{a+1}+2<\dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{0<s<\dfrac{1}{2}}$

(4) $s=\dfrac{2a}{a+1}$ より　$(2-s)a=s$　$s\neq 2$ であるから　$a=\dfrac{s}{2-s}$

s の値の範囲に注意して，これを (2) の結果に代入すると

$$t=-\frac{2\sqrt{\dfrac{s}{2-s}}}{\dfrac{s}{2-s}+1}=\boldsymbol{-\sqrt{s(2-s)}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $R = a^x = b^y = (ab)^z$ とおくと $(x,\ y,\ z \neq 0,\ 1 < a < b)$ $\quad R \neq 1$

$$a = R^{\frac{1}{x}}, \quad b = R^{\frac{1}{y}}, \quad ab = R^{\frac{1}{z}}$$

ゆえに $\quad R^{\frac{1}{x}} R^{\frac{1}{y}} = R^{\frac{1}{z}}$ $\quad$ したがって $\quad R^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = R^{\frac{1}{z}}$ $\quad$ よって $\quad \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$

別解 $R = a^x = b^y = (ab)^z$ とおくと $(x,\ y,\ z \neq 0,\ 1 < a < b)$ $\quad R \neq 1$

正の実数 c $(c \neq 1)$ を底とする対数をとると

$$\log_c R = x \log_c a = y \log_c b = z(\log_c a + \log_c b)$$

したがって $\quad \log_c a = \dfrac{\log_c R}{x}, \quad \log_c b = \dfrac{\log_c R}{y}, \quad \log_c a + \log_c b = \dfrac{\log_c R}{z}$

上の第 1 式，第 2 式を第 3 式に代入すると

$$\frac{\log_c R}{x} + \frac{\log_c R}{y} = \frac{\log_c R}{z} \quad \text{よって} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

(2) $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{5}$ より $\quad mn = 5(m+n)$ $\quad$ ゆえに $\quad (m-5)(n-5) = 25$

$m > n$ に注意すると，$m - 5 > n - 5 > 0$ であるから

$$m - 5 = 25, \quad n - 5 = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{(m,\ n) = (30,\ 6)}$$

(3) $m,\ n$ は自然数であるから，$Q = a^m = b^n$ とおくと $(1 < a < b)$ $\quad Q > 1$

$$a = Q^{\frac{1}{m}}, \quad b = Q^{\frac{1}{n}}$$

$a < b$ より $\quad Q^{\frac{1}{m}} < Q^{\frac{1}{n}}$ $\quad$ ゆえに $\quad \dfrac{1}{m} < \dfrac{1}{n}$ $\quad$ すなわち $\quad m > n$

(1) において，$x = m,\ y = n,\ z = 5$ とすると，$a^m = b^n = (ab)^5$ ならば

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{5}$$

さらに，(2) の結論により

$$a^{30} = b^6 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b = a^5}$$

■