令和３年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)80 分
文・法・経済・経営・国際人間科学 (グローバル文化・発達コミュニティ・環境共生 (文科系)・子ども教育)・医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

$\boxed{1}$ i を虚数単位とする．以下の問に答えよ．

(1) $n = 2, 3, 4, 5$ のとき $(3+i)^n$ を求めよ．またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ．

(2) n を正の整数とするとき $(3+i)^n$ は虚数であることを示せ．

$\boxed{2}$ k, x, y, z を実数とする．k が以下の (1), (2), (3) のそれぞれの場合に，不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 + k(xy + yz + zx) \geqq 0$$

が成り立つことを示せ．また等号が成り立つのはどんな場合か．

(1) $k = 2$

(2) $k = -1$

(3) $-1 < k < 2$

$\boxed{3}$ 水平な地面に一本の塔が垂直に建っている (太さは無視する)．塔の先端を P とし，足元の地点を H とする．また，H を通らない一本の道が一直線に延びている (幅は無視する)．道の途中に 3 地点 A，B，C がこの順にあり，$\mathrm{BC} = 2\mathrm{AB}$ をみたしている．以下の問に答えよ．

(1) $2\mathrm{AH}^2 - 3\mathrm{BH}^2 + \mathrm{CH}^2 = 6\mathrm{AB}^2$ が成り立つことを示せ．

(2) A，B，C から P を見上げた角度 $\angle\mathrm{PAH}$，$\angle\mathrm{PBH}$，$\angle\mathrm{PCH}$ はそれぞれ 45°，60°，30° であった．$\mathrm{AB} = 100\mathrm{m}$ のとき，塔の高さ PH (m) の整数部分を求めよ．

(3) (2) において，H と道との距離 (m) の整数部分を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1)

$$(3+i)^2 = 9+6i+i^2 = \mathbf{8+6}\boldsymbol{i}$$

$$\begin{aligned}(3+i)^3 &= (3+i)(3+i)^2 = (3+i)(8+6i)\\ &= 24+26i+6i^2 = \mathbf{18+26}\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3+i)^4 &= (3+i)(3+i)^3 = (3+i)(18+26i)\\ &= 54+96i+26i^2 = \mathbf{28+96}\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3+i)^5 &= (3+i)(3+i)^4 = (3+i)(28+96i)\\ &= 84+316i+96i^2 = \mathbf{-12+316}\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

$n=2,3,4,5$ のとき，$(3+i)^n$ の虚部を 10 で割った余りは，すべて　**6**

(2) 自然数 n について，$(3+i)^n = a_n + b_n i$ とすると

$$\begin{aligned}a_{n+1} + b_{n+1} i &= (3+i)(a_n + b_n i)\\ &= 3a_n - b_n + (a_n + 3b_n)i\end{aligned}$$

したがって　$a_{n+1} = 3a_n - b_n,\quad b_{n+1} = a_n + 3b_n$

(1) の結果から

$$(*)\quad n \geqq 2 \text{ のとき}\quad a_n \equiv 8,\quad b_n \equiv 6 \pmod{10}$$

であると推測する．

［1］$n=2$ のとき，(1) の結果から，$(*)$ は成立する．

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= 3a_k - b_k \equiv 3\cdot 8 - 6 \equiv 8 \pmod{10}\\ b_{k+1} &= a_k + 3b_k \equiv 8 + 3\cdot 6 \equiv 6 \pmod{10}\end{aligned}$$

［1］，［2］より，2 以上の自然数 n について，$(*)$ が成立する．

$n=1$ のとき　$3+i = a_1 + b_1 i$ より　$b_1 = 1 \neq 0$

すべての自然数 n について，$b_n \neq 0$ であるから，$(3+i)^n$ は虚数である．

■

2 (1) $k=2$ のとき，$F=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ とおくと

$$F=(x+y+z)^2 \geqq 0$$

よって　$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geqq 0$

上式において，等号が成立するのは，$\boldsymbol{x+y+z=0}$ のときである．

(2) $k=-1$ のとき，$G=x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)$ とおくと

$$2G=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqq 0$$

よって　$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx) \geqq 0$

上式おいて，等号が成立するのは，次のときである．

$$x-y=0,\ y-z=0,\ z-x=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x=y=z}$$

(3) $-1<k<2$ とすると，$1+k>0,\ 2-k>0$ であるから

$$(1+k)F+(2-k)G=3(x^2+y^2+z^2)+3k(xy+yz+zx)$$

したがって，(1)，(2) の結果により

$$x^2+y^2+z^2+k(xy+yz+zx)=\frac{1}{3}(1+k)F+\frac{1}{3}(2-k)G \geqq 0$$

また，上式において，等号が成立するのは，次のときである．

$$x+y+z=0,\quad x=y=z \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x=y=z=0}$$

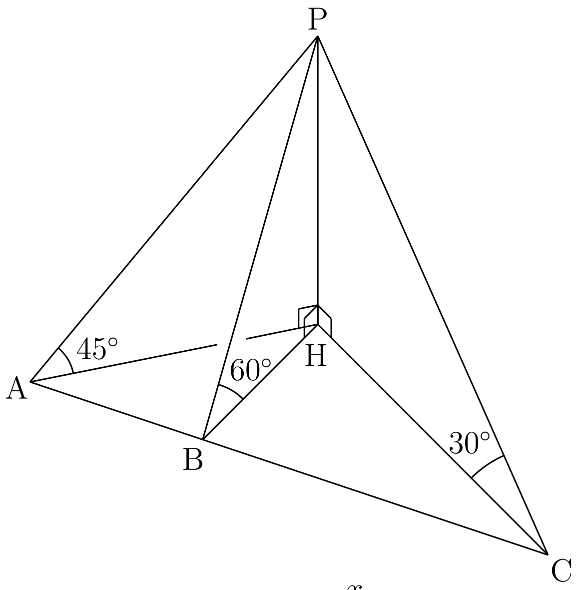
■

3 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BH}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}} + \overrightarrow{\mathrm{BH}} = -2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BH}}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}} + |\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2 \quad \cdots ①$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 = 4|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 - 4\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}} + |\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2 \quad \cdots ②$$

① × 2 + ② より　$2|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 = 6|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 3|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2$

よって　$2\mathrm{AH}^2 - 3\mathrm{BH}^2 + \mathrm{CH}^2 = 6\mathrm{AB}^2$



(2) $\mathrm{PH} = x$ (m) とすると，$\mathrm{AH} = x$，$\mathrm{BH} = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$，$\mathrm{CH} = \sqrt{3}x$，$\mathrm{AB} = 100$ (m) であるから，これらを (1) の結果に代入すると

$$2x^2 - 3\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 6\cdot 100^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = 15000 \qquad (*)$$

$122^2 = 14884$，$123^2 = 15129$ であるから　$122 < x < 123$

よって，PH (m) の整数部分は　**122**

(3) $(*)$ より，$x = 50\sqrt{6}$ であるから

$$\mathrm{AH} = 50\sqrt{6}\ (\mathrm{m}), \quad \mathrm{CH} = 150\sqrt{2}\ (\mathrm{m}), \quad \mathrm{AC} = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} = 300\ (\mathrm{m})$$

これから　$\mathrm{AH} : \mathrm{CH} : \mathrm{AC} = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{6}$

$\theta = \angle\mathrm{HAC}$ とすると　$\cos\theta = \dfrac{1 + 6 - 3}{2\cdot 1\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$　ゆえに　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

H と道の距離は　$\mathrm{AH}\sin\theta = 50\sqrt{6}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{2}$

$70^2 < (50\sqrt{2})^2 < 71^2$ より，求める整数は　**70**　■