

令和3年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)80分
 文・法・経済・経営・国際人間科学(グローバル文化・
 発達コミュニティ・環境共生(文科系)・子ども教育)・
 医(保健(理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

1 i を虚数単位とする。以下の問に答えよ。

- (1) $n = 2, 3, 4, 5$ のとき $(3 + i)^n$ を求めよ。またそれらの虚部の整数を10で割った余りを求めよ。
- (2) n を正の整数とするとき $(3 + i)^n$ は虚数であることを示せ。

2 k, x, y, z を実数とする。 k が以下の(1), (2), (3)のそれぞれの場合に、不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 + k(xy + yz + zx) \geq 0$$

が成り立つことを示せ。また等号が成り立つのはどんな場合か。

- (1) $k = 2$
- (2) $k = -1$
- (3) $-1 < k < 2$

3 水平な地面に一本の塔が垂直に建っている(太さは無視する)。塔の先端をPとし、足元の地点をHとする。また、Hを通らない一本の道が一直線に延びている(幅は無視する)。道の途中に3地点A, B, Cがこの順にあり、 $BC = 2AB$ をみたしている。以下の問に答えよ。

- (1) $2AH^2 - 3BH^2 + CH^2 = 6AB^2$ が成り立つことを示せ。
- (2) A, B, CからPを見上げた角度 $\angle PAH$, $\angle PBH$, $\angle PCH$ はそれぞれ 45° , 60° , 30° であった。AB = 100mのとき、塔の高さPH (m)の整数部分を求めよ。
- (3) (2)において、Hと道との距離(m)の整数部分を求めよ。

解答例

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} \quad (1) \quad & (3+i)^2 = 9 + 6i + i^2 = \mathbf{8 + 6i} \\
 & (3+i)^3 = (3+i)(3+i)^2 = (3+i)(8+6i) \\
 & \quad = 24 + 26i + 6i^2 = \mathbf{18 + 26i} \\
 & (3+i)^4 = (3+i)(3+i)^3 = (3+i)(18+26i) \\
 & \quad = 54 + 96i + 26i^2 = \mathbf{28 + 96i} \\
 & (3+i)^5 = (3+i)(3+i)^4 = (3+i)(28+96i) \\
 & \quad = 84 + 316i + 96i^2 = \mathbf{-12 + 316i}
 \end{aligned}$$

$n = 2, 3, 4, 5$ のとき, $(3+i)^n$ の虚部を 10 で割った余りは, すべて **6**

(2) 自然数 n について, $(3+i)^n = a_n + b_n i$ とすると

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} + b_{n+1}i &= (3+i)(a_n + b_n i) \\
 &= 3a_n - b_n + (a_n + 3b_n)i
 \end{aligned}$$

したがって $a_{n+1} = 3a_n - b_n$, $b_{n+1} = a_n + 3b_n$

(1) の結果から

$$(*) \quad n \geq 2 \text{ のとき } a_n \equiv 8, \quad b_n \equiv 6 \pmod{10}$$

であると推測する.

[1] $n = 2$ のとき, (1) の結果から, $(*)$ は成立する.

[2] $n = k$ のとき, $(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned}
 a_{k+1} &= 3a_k - b_k \equiv 3 \cdot 8 - 6 \equiv 8 \pmod{10} \\
 b_{k+1} &= a_k + 3b_k \equiv 8 + 3 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{10}
 \end{aligned}$$

[1], [2] より, 2 以上の自然数 n について, $(*)$ が成立する.

$n = 1$ のとき $3+i = a_1 + b_1 i$ より $b_1 = 1 \neq 0$

すべての自然数 n について, $b_n \neq 0$ であるから, $(3+i)^n$ は虚数である. ■

- 2 (1) $k = 2$ のとき, $F = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ とおくと

$$F = (x + y + z)^2 \geq 0$$

よって $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 0$

上式において, 等号が成立するのは, $\mathbf{x + y + z = 0}$ のときである.

- (2) $k = -1$ のとき, $G = x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)$ とおくと

$$2G = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$$

よって $x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \geq 0$

上式において, 等号が成立するのは, 次のときである.

$$x - y = 0, y - z = 0, z - x = 0 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{x = y = z}$$

- (3) $-1 < k < 2$ とすると, $1 + k > 0$, $2 - k > 0$ であるから

$$(1 + k)F + (2 - k)G = 3(x^2 + y^2 + z^2) + 3k(xy + yz + zx)$$

したがって, (1), (2) の結果により

$$x^2 + y^2 + z^2 + k(xy + yz + zx) = \frac{1}{3}(1 + k)F + \frac{1}{3}(2 - k)G \geq 0$$

また, 上式において, 等号が成立するのは, 次のときである.

$$x + y + z = 0, x = y = z \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{x = y = z = 0}$$

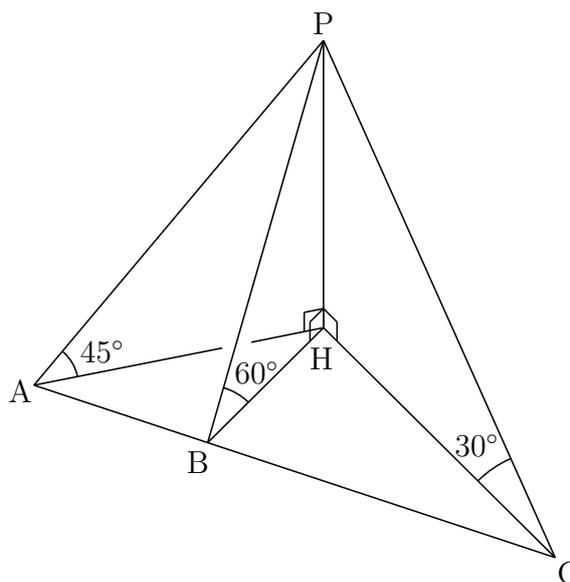


- 3 (1) $\vec{AH} = \vec{AB} + \vec{BH}$, $\vec{CH} = \vec{CB} + \vec{BH} = -2\vec{AB} + \vec{BH}$ より

$$|\vec{AH}|^2 = |\vec{AB}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BH} + |\vec{BH}|^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$|\vec{CH}|^2 = 4|\vec{AB}|^2 - 4\vec{AB} \cdot \vec{BH} + |\vec{BH}|^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

① $\times 2 +$ ② より $2|\vec{AH}|^2 + |\vec{CH}|^2 = 6|\vec{AB}|^2 + 3|\vec{BH}|^2$
 よって $2AH^2 - 3BH^2 + CH^2 = 6AB^2$



- (2) $PH = x$ (m) とすると, $AH = x$, $BH = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $CH = \sqrt{3}x$, $AB = 100$ (m) であるから, これらを (1) の結果に代入すると

$$2x^2 - 3\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + (\sqrt{3}x)^2 = 6 \cdot 100^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = 15000 \quad (*)$$

$122^2 = 14884$, $123^2 = 15129$ であるから $122 < x < 123$
 よって, PH (m) の整数部分は **122**

- (3) (*) より, $x = 50\sqrt{6}$ であるから

$$AH = 50\sqrt{6} \text{ (m)}, \quad CH = 150\sqrt{2} \text{ (m)}, \quad AC = AB + BC = 300 \text{ (m)}$$

これから $AH : CH : AC = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{6}$
 $\theta = \angle HAC$ とすると $\cos \theta = \frac{1+6-3}{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$ ゆえに $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

H と道の距離は $AH \sin \theta = 50\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{2}$

$70^2 < (50\sqrt{2})^2 < 71^2$ より, 求める整数は **70** ■