令和２年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)80 分
文・法・経済・経営・国際人間科学 (グローバル文化・発達コミュニティ・環境共生 (文科系)・子ども教育)・医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

1 $a,\ b,\ c,\ p$ は実数とし，$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $(x-p)^2$ で割り切れるとする．以下の問に答えよ．

(1) $b,\ c$ を $a,\ p$ を用いて表せ．

(2) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，$f'\left(p + \dfrac{4}{3}\right) = 0$ をみたすとする．a を p を用いて表せ．

(3) (2) の条件のもとで $p = 0$ とする．曲線 $y = f(x)$ と $y = f'(x)$ の交点を x 座標が小さい方から順に A，B，C とし，線分 AB と曲線 $y = f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_1，線分 BC と曲線 $y = f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする．このとき，$S_1 + S_2$ の値を求めよ．

2 n を自然数とし，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を次の (i)，(ii) で定める．

(i) $a_1 = b_1 = 1$ とする．

(ii) $f_n(x) = a_n(x+1)^2 + 2b_n$ とし，$-2 \leqq x \leqq 1$ における $f_n(x)$ の最大値を a_{n+1}，最小値を b_{n+1} とする．

以下の問に答えよ．

(1) すべての自然数 n について $a_n > 0$ かつ $b_n > 0$ であることを示せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおく．数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ．

(3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x-p$ で割り切れるから，$f(p)=0$ より

$$p^3+ap^2+bp+c=0 \quad ゆえに \quad c=-p^3-ap^2-bp \quad \cdots ①$$

したがって
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+ax^2+bx-p^3-ap^2-bp \\ &= x^3-p^3+a(x^2-p^2)+b(x-p) \\ &= (x-p)\{x^2+px+p^2+a(x+p)+b\} \end{aligned}$$

$g(x)=x^2+px+p^2+a(x+p)+b$ とおくと，$g(x)$ は $x-p$ で割り切れるから，$g(p)=0$ より

$$3p^2+2ap+b=0 \quad ゆえに \quad \boldsymbol{b=-3p^2-2ap}$$

上の第 2 式を ① に代入すると

$$c=-p^3-ap^2-(-3p^2-2ap)p=\boldsymbol{2p^3+ap^2}$$

(2) (1) の結果から　$f(x)=x^3+ax^2+(-3p^2-2ap)x+2p^3+ap^2$

$$f'(x)=3x^2+2ax-3p^2-2ap$$

$f'\left(p+\dfrac{4}{3}\right)=0$ より　$3\left(p+\dfrac{4}{3}\right)^2+2a\left(p+\dfrac{4}{3}\right)-3p^2-2ap=0$

整理すると　$3p+2+a=0$　よって　$\boldsymbol{a=-3p-2}$

(3) $p=0$ のとき，(2) の結果から　$a=-2,\ b=0,\ c=0$

$f(x)=x^3-2x^2$，$f'(x)=3x^2-4x$

2 曲線 $y=f(x)$，$y=f'(x)$ の交点の x 座標は

$$x^3-2x^2=3x^2-4x$$

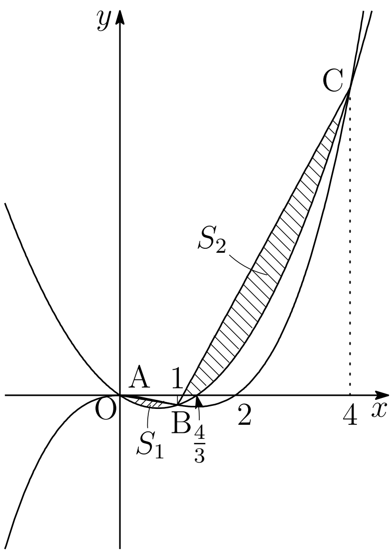
ゆえに　$x(x-1)(x-4)=0$

これを解いて　$x=0,\ 1,\ 4$

A$(0,\ 0)$，B$(1,-1)$，C$(4,\ 32)$

直線 AB は　$y=-x$

直線 BC は　$y=11x-12$



したがって

$$S_1 = \int_0^1 \{-x-(3x^2-4x)\}\,dx$$
$$= -3\int_0^1 x(x-1)\,dx = \frac{3}{6}(1-0)^3 = \frac{1}{2},$$
$$S_2 = \int_1^4 \{11x-12-(3x^2-4x)\}\,dx$$
$$= -3\int_1^4 (x-1)(x-4)\,dx = \frac{3}{6}(4-1)^3 = \frac{27}{2}$$

よって　$S_1+S_2 = \frac{1}{2}+\frac{27}{2} = \mathbf{14}$

2 (1) すべての自然数について

$$a_n > 0 \text{ かつ } b_n > 0 \quad \cdots(*)$$

であることを数学的帰納法により示す.

［1］$n=1$ のとき，$a_1 = 1 > 0,\ b_1 = 1 > 0$ より，$(*)$ は成立する.

［2］$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$a_{k+1} = f_n(1) = 4a_k + 2b_k > 0, \quad b_{k+1} = f_n(-1) = 2b_k > 0$$

したがって，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成立する.

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する.

(2) (1) の結果から　$a_{n+1} = 4a_n + 2b_n,\quad b_{n+1} = 2b_n$

$b_1 = 1$ および上の第 2 式から　$b_n = 1\cdot 2^{n-1} = \mathbf{2^{n-1}}$

(3) (2) の結果から　$a_{n+1} = 4a_n + 2^n$　ゆえに　$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 2\cdot\frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$

したがって　$c_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{1}{2}$，$c_{n+1} = 2c_n + \frac{1}{2}$

$$c_{n+1} + \frac{1}{2} = 2\left(c_n + \frac{1}{2}\right) \quad \text{ゆえに} \quad c_n + \frac{1}{2} = \left(c_1 + \frac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1}$$

よって　$\boldsymbol{c_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 30 個の○を一列に並べ，その間の 29 か所から 1 か所に仕切りを作る場合の総数に等しいから

$$ {}_{29}\mathrm{C}_1 = \mathbf{29} \text{ (個)} $$

(2) 30 個の○を一列に並べ，その間の 29 か所から 2 か所に仕切りを作る場合の総数に等しいから

$$ {}_{29}\mathrm{C}_2 = \frac{29 \cdot 28}{2 \cdot 1} = \mathbf{406} \text{ (個)} $$

(3) 和 30 になる 3 つの自然数の組合せについて

(i) 3 数が等しいものが $\{10,\ 10,\ 10\}$ の 1 組

(ii) 2 数だけが等しいものが，次の 13 組

$$ \{1, 1, 28\},\ \{2, 2, 26\},\ \cdots,\ \{9, 9, 12\},\ \{11, 11, 8\},\ \cdots \{14, 14, 2\} $$

(iii) 3 数がすべて異なるものが，n 組とすると，(i)，(ii) および (2) から

$$ 1 + 13 \cdot 3 + n \cdot 3! = 406 \quad \text{これを解いて} \quad n = 61 \text{ (組)} $$

よって，求める組合せの総数は，(i)〜(iii) から

$$ 1 + 13 + 61 = \mathbf{75} \text{ (組)} $$