平成 31 年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)80 分
文・法・経済・経営・国際人間科学 (グローバル文化・発達コミュニティ・環境共生 (文科系)・子ども教育)・医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

1 a，b，c を実数とし，$a \neq 0$ とする．2 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

で定める．曲線 $y = f(x)$ は点 $\left(2,\ 2 - \dfrac{c}{2}\right)$ を通り，

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{9}{2}$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を a を用いて表せ．

(2) 点 $(1,\ f(1))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線を ℓ とする．直線 ℓ の方程式を a を用いて表せ．

(3) $0 < a < \dfrac{1}{2}$ とする．(2) で求めた直線 ℓ の $y \geqq 0$ の部分と曲線 $y = f(x)$ の $x \geqq 0$ の部分および x 軸で囲まれた図形の面積 S の最大値と，そのときの a の値を求めよ．

2 次のように 1, 3, 4 を繰り返し並べて得られる数列を $\{a_n\}$ とする．

$$1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 3,\ 4, \cdots$$

すなわち，$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 4$ で，4 以上の自然数 n に対し，$a_n = a_{n-3}$ とする．この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする．以下の問に答えよ．

(1) S_n を求めよ．

(2) $S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しないことを示せ．

(3) どのような自然数 k に対しても，$S_n = k^2$ となる自然数 n が存在することを示せ．

3 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 2$ をみたす $\triangle$PAB を考え，辺 AB の中点を M，$\triangle$PAB の重心を G とする．以下の問に答えよ．

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2$ を内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{AGB} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の値を求めよ．

(3) 点 A と点 B を固定し，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \dfrac{5}{4}$ をみたすように点 P を動かすとき，$\angle\mathrm{ABG}$ の最大値を求めよ．ただし，$0 < \angle\mathrm{ABG} < \pi$ とする．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 曲線 $y=ax^2+bx+c$ が点 $\left(2,\ 2-\dfrac{c}{2}\right)$ を通るから

$$4a+2b+c=2-\frac{c}{2} \quad ゆえに \quad 4a+2b+\frac{3}{2}c=2 \quad \cdots ①$$

$\displaystyle\int_0^3 (ax^2+bx+c)\,dx=\frac{9}{2}$ より

$$\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_0^3=\frac{9}{2} \quad ゆえに \quad 9a+\frac{9}{2}b+3c=\frac{9}{2} \quad \cdots ②$$

①，② より　$b=1-2a$，$c=0$　よって　$\boldsymbol{f(x)=ax^2+(1-2a)x}$

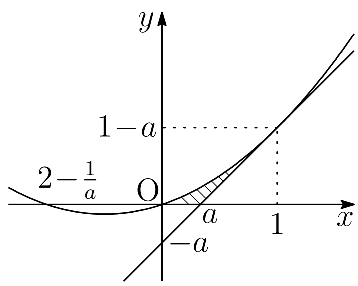
(2) (1) の結果から　$f(1)=1-a$，$f'(x)=2ax+1-2a$ から　$f'(1)=1$

よって，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-(1-a)=1(x-1) \quad すなわち \quad \boldsymbol{y=x-a}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} f(x)-(x-a) &= ax^2+(1-2a)x-(x-a) \\ &= a(x-1)^2 \end{aligned}$$



3 点 O，$(a,\ 0)$，$(0, -a)$ を頂点とする三角形の面積は $\dfrac{a^2}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 a(x-1)^2\,dx-\frac{a^2}{2}=\left[\frac{a}{3}(x-1)^3\right]_0^1-\frac{a^2}{2} \\ &= \frac{a}{3}-\frac{a^2}{2}=-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{18} \end{aligned}$$

$0<a<\dfrac{1}{2}$ より，S は，$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{18}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) (i) $n \equiv 0 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_3 + (1+3+4)\frac{n-3}{3} = 8 + \frac{8}{3}(n-3) = \frac{8n}{3}$$

(ii) $n \equiv 1 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_1 + (3+4+1)\frac{n-1}{3} = 1 + \frac{8}{3}(n-1) = \frac{8n-5}{3}$$

(iii) $n \equiv 2 \pmod 3$ のとき

$$S_n = S_2 + (4+1+3)\frac{n-2}{3} = 4 + \frac{8}{3}(n-2) = \frac{8n-4}{3}$$

よって $$\boldsymbol{S_n = \begin{cases} \dfrac{8n}{3} & (n \equiv 0 \pmod 3) \\ \dfrac{8n-5}{3} & (n \equiv 1 \pmod 3) \\ \dfrac{8n-4}{3} & (n \equiv 2 \pmod 3) \end{cases}}$$

(2) $n = 3m + r$ とおくと $(r = 0,\ 1,\ 2)$

$r = 0$ のとき $S_{3m} = \dfrac{8 \cdot 3m}{3} = 8m$

$r = 1$ のとき $S_{3m+1} = \dfrac{8(3m+1)-5}{3} = 8m+1$

$r = 2$ のとき $S_{3m+2} = \dfrac{8(3m+2)-4}{3} = 8m+4$

$2019 \equiv 3 \pmod 8$ であるから，$S_n = 2019$ となる自然数 n は存在しない．

(3) i) $k \equiv 0, \pm 4 \pmod 8$ のとき $k^2 \equiv 0 \pmod 8$

ii) $k \equiv \pm 1, \pm 3 \pmod 8$ のとき $k^2 \equiv 1 \pmod 8$

iii) $k \equiv \pm 2 \pmod 8$ のとき $k^2 \equiv 4 \pmod 8$

i)〜iii) および (2) の結果から，どのような自然数 k に対しても，

$$S_n = k^2$$

となる自然数 n が存在する．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 点 M は辺 AB の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}})$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} \quad \cdots ①$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{PB}} - \overrightarrow{\mathrm{PA}}| = 2$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 = 4 + 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

上の結果を ① に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = \frac{1}{4}(4 + 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 1}$$

(2) 点 G は △PAB の重心であるから　$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = 3\overrightarrow{\mathrm{GM}} \quad \cdots ②$

また，$\overrightarrow{\mathrm{GM}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}})$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \dfrac{3}{2}(\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}}) \quad \cdots ③$

$\angle\mathrm{AGB} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}} = 0 \quad \text{および} \quad |\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = 2^2 = 4$$

③ より

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 &= \frac{9}{4}|\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2 = \frac{9}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{GA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{GB}} + |\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2) \\ &= \frac{9}{4}(|\overrightarrow{\mathrm{GA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{GB}}|^2) = \frac{9}{4}\cdot 4 = 9 \end{aligned}$$

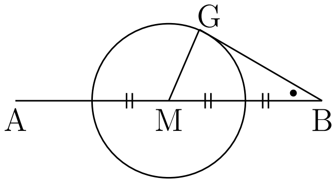
これを (1) の結果に代入して　$9 = \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 1$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = 8}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \dfrac{5}{4}$ を (1) の結果に代入すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2 = 1 + \frac{5}{4} \quad \text{ゆえに} \quad |\overrightarrow{\mathrm{PM}}| = \frac{3}{2}$$

これに ② を代入することにより　$|\overrightarrow{\mathrm{GM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{MG}}| = \dfrac{1}{2}$

したがって，G は M を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にある．B からこの円に引いた接線と辺 AB のなす角が求める最大値であるから，MB = 1 より



$$\boldsymbol{\angle\mathrm{ABG} = \frac{\pi}{6}}$$