平成 30 年度　神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分
文・法・経済・経営・国際人間科学 (グローバル文化・発達コミュニティ・環境共生 (文科系)・子ども教育)・医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

1 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする．OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とする．辺 OA を $1-t : t$ に内分する点を P，辺 OB を $t : 1-t$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を R とする．また $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\angle\mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ．

(3) t が (2) で求めた値をとるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ．

2 $f(x) = (2x-1)^3$ とする．数列 $\{x_n\}$ を次のように定める．

$x_1 = 2$ であり，x_{n+1} $(n \geqq 1)$ は点 $(x_n,\ f(x_n))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸の交点の x 座標とする．

以下の問に答えよ．

(1) 点 $(t,\ f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式を求めよ．また $t \neq \dfrac{1}{2}$ のときに，その接線と x 軸の交点の x 座標を求めよ．

(2) $x_n > \dfrac{1}{2}$ を示せ．また x_n を n の式で表せ．

(3) $|x_{n+1} - x_n| < \dfrac{3}{4} \times 10^{-5}$ を満たす最小の n を求めよ．ただし $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$，$0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ は用いてよい．

3 さいころを 3 回ふって，1 回目に出た目の数を a，2 回目と 3 回目に出た目の数の和を b とし，2 次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \cdots (*)$$

を考える．以下の問に答えよ．

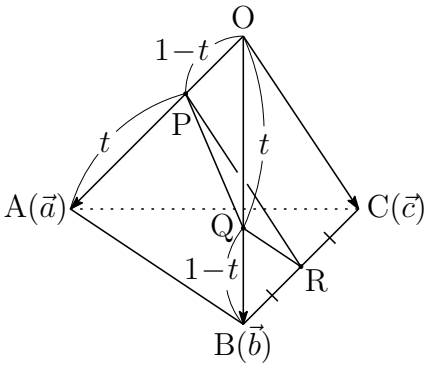
(1) $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ．

(2) $(*)$ が整数を解にもつとする．このとき $(*)$ の解は共に正の整数であり，また少なくとも 1 つの解は 3 以下であることを示せ．

(3) $(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ．

解答例

1 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$



したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-t\vec{b}$$

$$=\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

(2) $\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}=0$ であるから

$$\{(1-t)\vec{a}-t\vec{b}\}\cdot\left\{\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right\}=0$$

ゆえに　$(1-t)\left(\dfrac{1}{2}-t\right)\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{2}(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}-t\left(\dfrac{1}{2}-t\right)|\vec{b}|^2-\dfrac{1}{2}t\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

上式に $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，$|\vec{b}|=1$ を代入すると

$$\frac{1}{2}(1-t)\left(\frac{1}{2}-t\right)+\frac{1}{4}(1-t)-t\left(\frac{1}{2}-t\right)-\frac{1}{4}t=0$$

整理すると　$6t^2-7t+2=0$　ゆえに　$(2t-1)(3t-2)=0$

$0<t<1$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3}}$

(3) (i) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$，$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\dfrac{1}{2}|\vec{c}|=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2-2\cdot\frac{1}{2}+1^2}=\dfrac{1}{2}$

よって　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{8}}$

(ii) $t=\dfrac{2}{3}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b})$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\dfrac{1}{6}(-\vec{a}+3\vec{c})$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=\dfrac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}=\dfrac{1}{3}\sqrt{1^2-4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot1^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\dfrac{1}{6}\sqrt{|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{c}+9|\vec{c}|^2}=\dfrac{1}{6}\sqrt{1^2-6\cdot\frac{1}{2}+9\cdot1^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$

よって　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{QP}}||\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{6}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{21}}{36}}$ ■

2 (1) $f(x)=(2x-1)^3$ より　$f'(x)=6(2x-1)^2$

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(2t-1)^3=6(2t-1)^2(x-t)$$

したがって　$\boldsymbol{y=(2t-1)^2(6x-4t-1)}$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$6x-4t-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{x=\frac{4t+1}{6}}$$

(2) (1) の結果より，$x_{n+1}=\dfrac{4x_n+1}{6}$ であるから (ニュートン法[1])

$$x_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\left(x_n-\frac{1}{2}\right)$$

数列 $\left\{x_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $x_1-\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$x_n-\frac{1}{2}=\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x_n=\frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{2}}$$

これから　$x_n>\dfrac{1}{2}$

(3) (2) の結果から　$x_{n+1}-x_n=\dfrac{9}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}-\dfrac{9}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=-\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$|x_{n+1}-x_n|<\dfrac{3}{4}\times 10^{-5}$ のとき

$$\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{3}{4}\times 10^{-5} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^n<10^{-5}$$

常用対数をとると　$n(\log_{10}2-\log_{10}3)<-5$

したがって　$n>\dfrac{5}{\log_{10}3-\log_{10}2}$　$\cdots(*)$

ここで，$0.477-0.302<\log_{10}3-\log_{10}2<0.478-0.301$ であるから

$$28+\frac{44}{177}=\frac{5}{0.177}<\frac{5}{\log_{10}3-\log_{10}2}<\frac{5}{0.175}=28+\frac{4}{7}$$

よって，$(*)$ を満たす最小の n は　**29**　■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf (p.17 を参照)

3 (1) 2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0 \cdots (*)$ が $x = 1$ を解にもつから　$b = a - 1$

$1 \leqq a \leqq 6$，$2 \leqq b \leqq 12$ であるから

$$(a,\ b) = (3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 5)$$

a の値に対する確率は $\dfrac{1}{6}$，それぞれの b の値に対する確率は

b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36}\right) = \frac{10}{216} = \mathbf{\frac{5}{108}}$$

(2) 2 次方程式 $(*)$ の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b$$

$(*)$ の整数解を α とすると，上の第 1 式から

$$\beta = a - \alpha$$

上式の右辺は整数であるから，β も整数である．

2 整数 $\alpha,\ \beta$ について，$\alpha \leqq \beta$ とおいても一般性を失わないから

$$2\alpha \leqq \alpha + \beta = a \leqq 6 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha \leqq 3$$

(3) (i) $x = 2$ が 2 次方程式 $(*)$ の解のとき　$b = 2a - 4$

$$(a,\ b) = (3,\ 2),\ (4,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 8)$$

(ii) $x = 3$ が 2 次方程式 $(*)$ の解のとき　$b = 3a - 9$

$$(a,\ b) = (4,\ 3),\ (5,\ 6)\ (6,\ 9)$$

(1),(i),(ii) より

a	3	4	4,5	6	5	6	6
b	2	3	4	5	6	8	9

よって，求める確率は

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36}\cdot 2 + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36}\right) = \frac{27}{216} = \mathbf{\frac{1}{8}}$$

■