

平成30年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)80分
 文・法・経済・経営・国際人間科学(グローバル文化・
 発達コミュニティ・環境共生(文科系)・子ども教育)・
 医(保健(理学療法・看護・作業療法))

- 1 t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする． $OABC$ を1辺の長さが1の正四面体とする．辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P ，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q ，辺 BC の中点を R とする．また $\vec{a} = \vec{OA}$ ， $\vec{b} = \vec{OB}$ ， $\vec{c} = \vec{OC}$ とする．以下の問に答えよ．

- (1) \vec{QP} と \vec{QR} を $t, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ．
- (2) $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ のとき， t の値を求めよ．
- (3) t が(2)で求めた値をとるとき， $\triangle PQR$ の面積を求めよ．

- 2 $f(x) = (2x - 1)^3$ とする．数列 $\{x_n\}$ を次のように定める．

$x_1 = 2$ であり， x_{n+1} ($n \geq 1$) は点 $(x_n, f(x_n))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線と x 軸の交点の x 座標とする．

以下の問に答えよ．

- (1) 点 $(t, f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式を求めよ．また $t \neq \frac{1}{2}$ のときに，その接線と x 軸の交点の x 座標を求めよ．
- (2) $x_n > \frac{1}{2}$ を示せ．また x_n を n の式で表せ．
- (3) $|x_{n+1} - x_n| < \frac{3}{4} \times 10^{-5}$ を満たす最小の n を求めよ．ただし $0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ ， $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ は用いてよい．

- 3 さいころを3回ふって，1回目に出た目の数を a ，2回目と3回目に出た目の数の和を b とし，2次方程式

$$x^2 - ax + b = 0 \quad \dots (*)$$

を考える．以下の問に答えよ．

- (1) $(*)$ が $x = 1$ を解にもつ確率を求めよ．
- (2) $(*)$ が整数を解にもつとする．このとき $(*)$ の解は共に正の整数であり，また少なくとも1つの解は3以下であることを示せ．
- (3) $(*)$ が整数を解にもつ確率を求めよ．

解答例

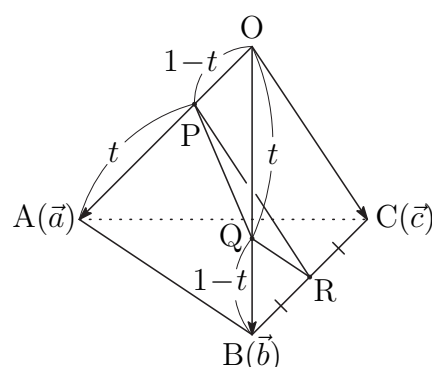
$$\boxed{1} \quad (1) \quad \overrightarrow{OP} = (1-t)\vec{a}, \overrightarrow{OQ} = t\vec{b}, \overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c})$$

したがって

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (1-t)\vec{a} - t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - t\vec{b}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$



$$(2) \quad \angle PQR = \frac{\pi}{2} \text{ より, } \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = 0 \text{ であるから}$$

$$\{(1-t)\vec{a} - t\vec{b}\} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2} - t\right)\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right\} = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (1-t) \left(\frac{1}{2} - t\right) \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}(1-t)\vec{c} \cdot \vec{a} - t \left(\frac{1}{2} - t\right) |\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}t\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$$

上式に $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1^2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $|\vec{b}| = 1$ を代入すると

$$\frac{1}{2}(1-t) \left(\frac{1}{2} - t\right) + \frac{1}{4}(1-t) - t \left(\frac{1}{2} - t\right) - \frac{1}{4}t = 0$$

整理すると $6t^2 - 7t + 2 = 0$ ゆえに $(2t-1)(3t-2) = 0$

$$0 < t < 1 \text{ に注意して, これを解くと } t = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$$

$$(3) \quad (i) \quad t = \frac{1}{2} \text{ のとき } \overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}), \overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\vec{c}, |\overrightarrow{QR}| = \frac{1}{2}|\vec{c}| = \frac{1}{2}$$

$$\text{ゆえに } |\overrightarrow{QP}| = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \Delta PQR = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{QR}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$(ii) \quad t = \frac{2}{3} \text{ のとき } \overrightarrow{QP} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b}), \overrightarrow{QR} = \frac{1}{6}(-\vec{a} + 3\vec{c})$$

$$\text{ゆえに } |\overrightarrow{QP}| = \frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2} = \frac{1}{3}\sqrt{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$|\overrightarrow{QR}| = \frac{1}{6}\sqrt{|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{c} + 9|\vec{c}|^2} = \frac{1}{6}\sqrt{1^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} + 9 \cdot 1^2} = \frac{\sqrt{7}}{6}$$

$$\text{よって } \Delta PQR = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QP}||\overrightarrow{QR}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{21}}{36}$$

2 (1) $f(x) = (2x - 1)^3$ より $f'(x) = 6(2x - 1)^2$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (2t - 1)^3 = 6(2t - 1)^2(x - t)$$

したがって $y = (2t - 1)^2(6x - 4t - 1)$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$6x - 4t - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{4t + 1}{6}$$

(2) (1) の結果より, $x_{n+1} = \frac{4x_n + 1}{6}$ であるから (ニュートン法¹)

$$x_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \left(x_n - \frac{1}{2} \right)$$

数列 $\left\{ x_n - \frac{1}{2} \right\}$ は, 初項 $x_1 - \frac{1}{2}$, 公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$x_n - \frac{1}{2} = \left(2 - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad x_n = \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{2}$$

これから $x_n > \frac{1}{2}$

(3) (2) の結果から $x_{n+1} - x_n = \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} - \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^n = -\frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^n$

$|x_{n+1} - x_n| < \frac{3}{4} \times 10^{-5}$ のとき

$$\frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^n < \frac{3}{4} \times 10^{-5} \quad \text{ゆえに} \quad \left(\frac{2}{3} \right)^n < 10^{-5}$$

常用対数をとると $n(\log_{10} 2 - \log_{10} 3) < -5$

したがって $n > \frac{5}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} \quad \dots (*)$

ここで, $0.477 - 0.302 < \log_{10} 3 - \log_{10} 2 < 0.478 - 0.301$ であるから

$$28 + \frac{44}{177} = \frac{5}{0.177} < \frac{5}{\log_{10} 3 - \log_{10} 2} < \frac{5}{0.175} = 28 + \frac{4}{7}$$

よって, (*) を満たす最小の n は **29**

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf (p.17 を参照)

- 3** (1) 2次方程式 $x^2 - ax + b = 0 \cdots (*)$ が $x = 1$ を解にもつから $b = a - 1$
 $1 \leq a \leq 6, 2 \leq b \leq 12$ であるから

$$(a, b) = (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$$

a の値に対する確率は $\frac{1}{6}$, それぞれの b の値に対する確率は

b	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

よって, 求める確率は

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} \right) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$$

- (2) 2次方程式 $(*)$ の解を α, β とすると, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = a, \quad \alpha\beta = b$$

$(*)$ の整数解を α とすると, 上の第1式から

$$\beta = a - \alpha$$

上式の右辺は整数であるから, β も整数である.

2整数 α, β について, $\alpha \leq \beta$ とおいても一般性を失わないから

$$2\alpha \leq \alpha + \beta = a \leq 6 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha \leq 3$$

- (3) (i) $x = 2$ が2次方程式 $(*)$ の解のとき $b = 2a - 4$

$$(a, b) = (3, 2), (4, 4), (5, 6), (6, 8)$$

- (ii) $x = 3$ が2次方程式 $(*)$ の解のとき $b = 3a - 9$

$$(a, b) = (4, 3), (5, 6), (6, 9)$$

(1),(i),(ii) より

a	3	4	4,5	6	5	6	6
b	2	3	4	5	6	8	9

よって, 求める確率は

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} \cdot 2 + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} \right) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$