

平成29年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)80分
 文・法・経済・経営・国際人間科学(グローバル文化・
 発達コミュニティ・環境共生(文科系)・子ども教育)・
 医(保健(理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

1 t を正の実数とする. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3(t^2 - 1)x + 2t^3 - 3t^2 + 1$ とおく. 以下の問に答えよ.

- (1) $2t^3 - 3t^2 + 1$ を因数分解せよ.
- (2) $f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ.
- (3) $-1 \leq x \leq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ.

2 次の2つの条件をみたす x の2次式 $f(x)$ を考える.

- (i) $y = f(x)$ のグラフは点 $(1, 4)$ を通る.
- (ii) $\int_{-1}^2 f(x) dx = 15$.

以下の問に答えよ.

- (1) $f(x)$ の1次の項の係数を求めよ.
- (2) 2次方程式 $f(x) = 0$ の2つの解を α, β とするとき, α と β のみたす関係式を求めよ.
- (3) (2) における α, β がともに正の整数となるような $f(x)$ をすべて求めよ.

3 $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, -1, -1)$, $\vec{v}_3 = (-1, 1, -1)$, $\vec{v}_4 = (-1, -1, 1)$ とする. 座標空間内の動点 P が原点 O から出発し, 正四面体のサイコロ (1, 2, 3, 4 の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ が出る) をふるごとに, 出た目が k ($k = 1, 2, 3, 4$) のときは \vec{v}_k だけ移動する. すなわち, サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n とし, サイコロを $(n+1)$ 回目によって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = \vec{v}_k$$

である. ただし, $P_0 = O$ である. 以下の問に答えよ.

- (1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ.
- (2) $\overrightarrow{P_0 P_2} \perp \overrightarrow{P_2 P_4}$ となる確率を求めよ.
- (3) 4点 P_0, P_1, P_2, P_3 が同一平面上にある確率を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad 2t^3 - 3t^2 + 1 = (2t + 1)(t - 1)^2$$

$$(2) \quad f(x) = x^3 + 3x^2 - 3(t^2 - 1)x + 2t^3 - 3t^2 + 1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 3(t^2 - 1) = 3(x^2 + 2x + 1 - t^2) \\ &= 3\{(x + 1)^2 - t^2\} = 3(x + 1 + t)(x + 1 - t) \end{aligned}$$

x	\cdots	$-1 - t$	\cdots	$-1 + t$	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	極大 $4t^3$	\searrow	極小 0	\nearrow

よって、 $f(x)$ は $x = -1 + t$ で極小値 0 をとる。

補足 $f(x) = (x + 1)^3 - 3t^2(x + 1) + 2t^3$ であるから、 $x + 1 = X$ とおくと

$$X^3 - 3t^2X + 2t^3 = (X - t)^2(X + 2t)$$

$$\text{ゆえに} \quad f(x) = (x + 1 - t)^2(x + 1 + 2t)$$

$$(3) \quad f(-1) = 2t^3 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(-1) &= (x + 1)^3 - 3t^2(x + 1) = (x + 1)\{(x + 1)^2 - 3t^2\} \\ &= (x + 1)(x + 1 + \sqrt{3}t)(x + 1 - \sqrt{3}t) \end{aligned}$$

$-1 + t \leq 2$, すなわち、 $0 < t \leq 3$ のとき

$$m = f(-1 + t)$$

$2 \leq -1 + t$, すなわち、 $t \geq 3$ のとき

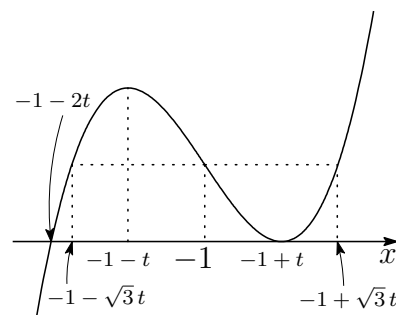
$$m = f(2)$$

$-1 + \sqrt{3}t \leq 2$, すなわち、 $0 < t \leq \sqrt{3}$ のとき

$$M = f(2)$$

$2 \leq -1 + \sqrt{3}t$, すなわち、 $t \geq \sqrt{3}$ のとき

$$M = f(-1)$$



$$\text{よって} \quad m = \begin{cases} 0 & (0 < t \leq 3) \\ 2t^3 - 9t^2 + 27 & (t \geq 3) \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} 2t^3 - 9t^2 + 27 & (0 < t \leq \sqrt{3}) \\ 2t^3 & (t \geq \sqrt{3}) \end{cases}$$

2 (1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおくと, (i) より, $f(1) = 4$ であるから

$$a + b + c = 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(ii) より, $\int_{-1}^2 (ax^2 + bx + c) dx = 15$ であるから

$$\left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_{-1}^2 = 15 \quad \text{ゆえに} \quad a + \frac{b}{2} + c = 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より $a + c = 6$, $b = -2$ よって, 求める1次の係数は -2

(2) (1) の結果から

$$f(x) = ax^2 - 2x + 6 - a \quad \cdots (*)$$

とおける. 2次方程式 $f(x) = 0$ の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = \frac{2}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{6-a}{a} = \frac{6}{a} - 1 \quad \cdots (**)$$

上の2式から a を消去すると

$$\alpha\beta = 3(\alpha + \beta) - 1 \quad \text{よって} \quad (\alpha - 3)(\beta - 3) = 8$$

(3) α, β がともに正の整数であるから, $1 \leq \alpha \leq \beta$ とすると, $-2 \leq \alpha - 3 \leq \beta - 3$ に注意すると, (2) の結果から

$$(\alpha - 3, \beta - 3) = (1, 8), (2, 4) \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha, \beta) = (4, 11), (5, 7)$$

(**) の第1式より, $a = \frac{2}{\alpha + \beta}$ であるから $a = \frac{2}{15}, \frac{1}{6}$

これを (*) に代入して

$$f(x) = \frac{2}{15}x^2 - 2x + \frac{88}{15} \quad \text{または} \quad f(x) = \frac{1}{6}x^2 - 2x + \frac{35}{6}$$



- 3 (1) $i, j = 1, 2, 3, 4$ とし, $\vec{v}_i + \vec{v}_j$ が x 軸と平行になる組み合わせは

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 + \vec{v}_2 &= \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = (2, 0, 0) \\ \vec{v}_3 + \vec{v}_4 &= \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = (-2, 0, 0)\end{aligned}$$

したがって, 求める確率は $\frac{2! + 2!}{4^2} = \frac{1}{4}$

- (2) $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ とおくと, $\overrightarrow{P_0P_2}$ および $\overrightarrow{P_2P_4}$ は, 次のベクトルからなる.

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 + \vec{v}_1 &= 2\vec{v}_1, & \vec{v}_2 + \vec{v}_2 &= 2\vec{v}_2, \\ \vec{v}_3 + \vec{v}_3 &= 2\vec{v}_3, & \vec{v}_4 + \vec{v}_4 &= 2\vec{v}_4, \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 &= \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_1, & \vec{v}_1 + \vec{v}_3 &= \vec{v}_3 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_2, \\ \vec{v}_1 + \vec{v}_4 &= \vec{v}_4 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_3, & \vec{v}_2 + \vec{v}_3 &= \vec{v}_3 + \vec{v}_2 = -2\vec{e}_3, \\ \vec{v}_2 + \vec{v}_4 &= \vec{v}_4 + \vec{v}_2 = -2\vec{e}_2, & \vec{v}_3 + \vec{v}_4 &= \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = -2\vec{e}_1\end{aligned}$$

$\vec{v}_j \cdot \vec{e}_k \neq 0$ であるから ($j = 1, 2, 3, 4, k = 1, 2, 3$), $\overrightarrow{P_0P_2} \perp \overrightarrow{P_2P_4}$ となるのは, $\overrightarrow{P_0P_2}$ および $\overrightarrow{P_2P_4}$ が座標軸に平行で, 互いに垂直な場合について調べればよい. (1)の結果と同様に, $\overrightarrow{P_0P_2}$ および $\overrightarrow{P_2P_4}$ は, x 軸, y 軸, z 軸と平行となる確率は $\frac{1}{4}$ であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \times {}_3P_2 = \frac{3}{8}$$

- (3) $i \neq j, j \neq k, k \neq i$ のとき, $\vec{v}_i, \vec{v}_j, \vec{v}_k$ は 1 次独立であるから, $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}$ がすべて異なる場合を除く確率であるから

$$1 - \frac{{}_4P_3}{4^3} = 1 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3} = \frac{5}{8}$$

