平成 29 年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)80 分
文・法・経済・経営・国際人間科学 (グローバル文化・発達コミュニティ・環境共生 (文科系)・子ども教育)・医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

1 t を正の実数とする．$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $2t^3-3t^2+1$ を因数分解せよ．

(2) $f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ．

(3) $-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ．

2 次の 2 つの条件をみたす x の 2 次式 $f(x)$ を考える．

(i) $y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 4)$ を通る．

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 15.$

以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ．

(2) 2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，α と β のみたす関係式を求めよ．

(3) (2) における α，β がともに正の整数となるような $f(x)$ をすべて求めよ．

3 $\vec{v}_1=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v}_2=(1,-1,-1)$，$\vec{v}_3=(-1,\ 1,-1)$，$\vec{v}_4=(-1,-1,\ 1)$ とする．座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ (1，2，3，4 の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で出る) をふるごとに，出た目が k $(k=1,2,3,4)$ のときは $\vec{v}_k$ だけ移動する．すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として，サイコロを $(n+1)$ 回目にふって出た目が k ならば

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \vec{v}_k$$

である．ただし，$\mathrm{P}_0=\mathrm{O}$ である．以下の問に答えよ．

(1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2} \perp \overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4}$ となる確率を求めよ．

(3) 4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $2t^3-3t^2+1=\boldsymbol{(2t+1)(t-1)^2}$

(2) $f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$ より

$$\begin{aligned} f'(x)&=3x^2+6x-3(t^2-1)=3(x^2+2x+1-t^2)\\ &=3\{(x+1)^2-t^2\}=3(x+1+t)(x+1-t)\end{aligned}$$

x	$\cdots$	$-1-t$	$\cdots$	$-1+t$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 $4t^3$	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x=-1+t$ で極小値 0 をとる．

補足 $f(x)=(x+1)^3-3t^2(x+1)+2t^3$ であるから，$x+1=X$ とおくと

$$X^3-3t^2X+2t^3=(X-t)^2(X+2t)$$

ゆえに $\quad f(x)=(x+1-t)^2(x+1+2t)$

(3) $f(-1)=2t^3$ であるから

$$\begin{aligned} f(x)-f(-1)&=(x+1)^3-3t^2(x+1)=(x+1)\{(x+1)^2-3t^2\}\\ &=(x+1)(x+1+\sqrt{3}\,t)(x+1-\sqrt{3}\,t)\end{aligned}$$

$-1+t\leqq 2$，すなわち，$0<t\leqq 3$ のとき

$$m=f(-1+t)$$

$2\leqq -1+t$，すなわち，$t\geqq 3$ のとき

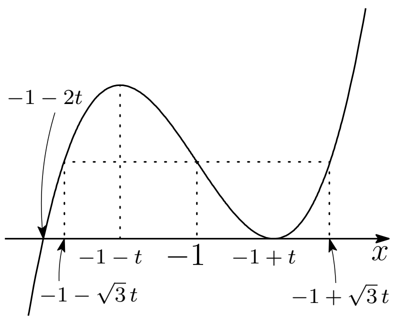
$$m=f(2)$$

$-1+\sqrt{3}t\leqq 2$，すなわち，$0<t\leqq\sqrt{3}$ のとき

$$M=f(2)$$

$2\leqq -1+\sqrt{3}t$，すなわち，$t\geqq\sqrt{3}$ のとき

$$M=f(-1)$$



よって $\quad \boldsymbol{m=\begin{cases}0 & (0<t\leqq 3)\\ 2t^3-9t^2+27 & (t\geqq 3)\end{cases}}$

$$\boldsymbol{M=\begin{cases}2t^3-9t^2+27 & (0<t\leqq\sqrt{3})\\ 2t^3 & (t\geqq\sqrt{3})\end{cases}}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=ax^2+bx+c$ とおくと，(i) より，$f(1)=4$ であるから

$$a+b+c=4 \quad \cdots ①$$

(ii) より，$\displaystyle\int_{-1}^{2}(ax^2+bx+c)\,dx=15$ であるから

$$\left[\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\right]_{-1}^{2}=15 \quad \text{ゆえに} \quad a+\frac{b}{2}+c=5 \quad \cdots ②$$

①，② より　$a+c=6$，$b=-2$　よって，求める 1 次の係数は　$\mathbf{-2}$

(2) (1) の結果から

$$f(x)=ax^2-2x+6-a \quad \cdots (*)$$

とおける．2 次方程式 $f(x)=0$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=\frac{2}{a}, \quad \alpha\beta=\frac{6-a}{a}=\frac{6}{a}-1 \quad \cdots (**)$$

上の 2 式から a を消去すると

$$\alpha\beta=3(\alpha+\beta)-1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{(\alpha-3)(\beta-3)=8}$$

(3) α，β がともに正の整数であるから，$1\leqq\alpha\leqq\beta$ とすると，$-2\leqq\alpha-3\leqq\beta-3$ に注意すると，(2) の結果から

$$(\alpha-3,\ \beta-3)=(1,\ 8),\ (2,\ 4) \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha,\ \beta)=(4,\ 11),\ (5,\ 7)$$

$(**)$ の第 1 式より，$a=\dfrac{2}{\alpha+\beta}$ であるから　　$a=\dfrac{2}{15},\ \dfrac{1}{6}$

これを $(*)$ に代入して

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{2}{15}x^2-2x+\frac{88}{15}} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{f(x)=\frac{1}{6}x^2-2x+\frac{35}{6}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $i, j = 1, 2, 3, 4$ とし，$\vec{v}_i + \vec{v}_j$ が x 軸と平行になる組み合わせは

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = (2,\ 0,\ 0)$$
$$\vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = (-2,\ 0,\ 0)$$

したがって，求める確率は $\dfrac{2! + 2!}{4^2} = \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(2) $\vec{e}_1 = (1,\ 0,\ 0)$，$\vec{e}_2 = (0,\ 1,\ 0)$，$\vec{e}_3 = (0,\ 0,\ 1)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は，次のベクトルからなる．

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_1 + \vec{v}_1 = 2\vec{v}_1, && \vec{v}_2 + \vec{v}_2 = 2\vec{v}_2, \\
&\vec{v}_3 + \vec{v}_3 = 2\vec{v}_3, && \vec{v}_4 + \vec{v}_4 = 2\vec{v}_4, \\
&\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_1, && \vec{v}_1 + \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_2, \\
&\vec{v}_1 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_1 = 2\vec{e}_3, && \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{v}_3 + \vec{v}_2 = -2\vec{e}_3, \\
&\vec{v}_2 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_2 = -2\vec{e}_2, && \vec{v}_3 + \vec{v}_4 = \vec{v}_4 + \vec{v}_3 = -2\vec{e}_1
\end{aligned}$$

$\vec{v}_j \cdot \vec{e}_k \neq 0$ であるから $(j = 1, 2, 3, 4,\ k = 1, 2, 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}} \perp \overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ となるのは，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ が座標軸に平行で，互いに垂直な場合について調べればよい．(1) の結果と同様に，$\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_4}}$ は，x 軸，y 軸，z 軸と平行となる確率は $\dfrac{1}{4}$ であるから，求める確率は

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \times {}_3\mathrm{P}_2 = \mathbf{\frac{3}{8}}$$

(3) $i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i$ のとき，$\vec{v}_i,\ \vec{v}_j,\ \vec{v}_k$ は 1 次独立であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}$ がすべて異なる場合を除く確率であるから

$$1 - \frac{{}_4\mathrm{P}_3}{4^3} = 1 - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3} = \mathbf{\frac{5}{8}}$$