

平成 28 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境(文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

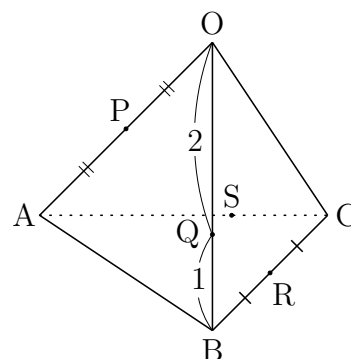
医(保健(理学療法・看護・作業療法))

- 1** 四面体 $OABC$ において, P を OA の中点, Q を辺 OB を $2:1$ に内分する点, R を辺 BC の中点とする. P, Q, R を通る平面と辺 AC の交点を S とする. $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$ とおく. 以下の問に答えよ.
- (1) \vec{PQ} , \vec{PR} をそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ.
 - (2) 比 $|\vec{AS}| : |\vec{SC}|$ を求めよ.
 - (3) 四面体 $OABC$ を 1 辺の長さが 1 の正四面体とすると, $|\vec{QS}|$ を求めよ.
- 2** a を正の定数とし, $f(x) = |x^2 + 2ax + a|$ とおく. 以下の問に答えよ.
- (1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.
 - (2) $y = f(x)$ のグラフが点 $(-1, 2)$ を通るとき a の値を求めよ. また, そのときの $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ.
 - (3) $a = 2$ とする. すべての実数 x に対して $f(x) \geq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を求めよ.
- 3** さいころを 4 回振って出た目を順に a, b, c, d とする. 以下の問に答えよ.
- (1) $ab \geq cd + 25$ となる確率を求めよ.
 - (2) $ab = cd$ となる確率を求めよ.

解答例

1 (1) 右の図から

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \vec{OQ} - \vec{OP} = \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}, \\ \vec{PR} &= \vec{OR} - \vec{OP} \\ &= \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}}{2}\end{aligned}$$



(2) Sは平面PQR上の点であるから、実数 s, t を用いて

$$\begin{aligned}\vec{OS} &= \vec{OP} + s\vec{PQ} + t\vec{PR} = \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + t(\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2}(1 - s - t)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}s + t\right)\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

このとき、Sは直線AC上の点であるから

$$\frac{1}{2}(1 - s - t) + \frac{t}{2} = 1, \quad \frac{2}{3}s + t = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = -1, \quad t = \frac{4}{3}$$

したがって $\vec{OS} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$ よって $|\vec{AS}| : |\vec{SC}| = 2 : 1$

$$(3) \quad \vec{QS} = \vec{OS} - \vec{OQ} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})$$

$$\begin{aligned}\text{したがって} \quad |\vec{QS}|^2 &= \frac{1}{9}|\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|^2 \\ &= \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 8\vec{b}\cdot\vec{c} + 4\vec{c}\cdot\vec{a})\end{aligned}$$

このとき $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1 \cdot 1 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\text{ゆえに} \quad |\vec{QS}|^2 = \frac{1}{9}(1 + 4 + 4 - 2 - 4 + 2) = \frac{5}{9} \quad \text{よって} \quad |\vec{QS}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

2 (1) $g(x) = x^2 + 2ax + a$ とおくと $g(x) = (x+a)^2 - a^2 + a$

$a > 0$ に注意すると

(i) $-a^2 + a \geq 0$, すなわち, $0 < a \leq 1$ のとき, $g(x) \geq 0$ であるから

$$f(x) = |g(x)| = g(x)$$

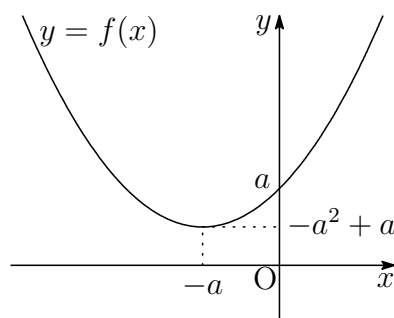
(ii) $-a^2 + a < 0$, すなわち, $1 < a$ のとき,

$$g(x) = 0 \text{ の解は } x = -a \pm \sqrt{a^2 - a}$$

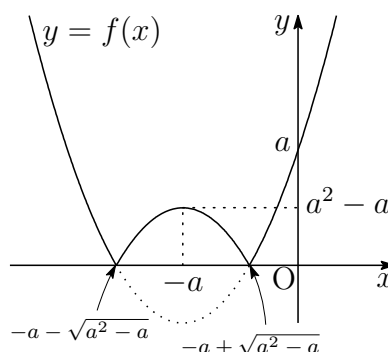
$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & (x \leq -a - \sqrt{a^2 - a}, -a + \sqrt{a^2 - a} \leq x) \\ -g(x) & (-a - \sqrt{a^2 - a} \leq x \leq -a + \sqrt{a^2 - a}) \end{cases}$$

(i), (ii) より, $y = f(x)$ のグラフは, 次のようになる.

(i) $0 < a \leq 1$ のとき



(ii) $1 < a$ のとき



(2) $y = f(x)$ が点 $(-1, 2)$ を通るから, $f(-1) = 2$ より

$$|1 - a| = 2 \quad \text{このとき, } a > 0 \text{ に注意して解くと } a = 3$$

(1) で示したグラフから, $y = f(x)$ と x 軸との交点の x 座標は $-3 \pm \sqrt{6}$

$$\text{よって } - \int_{-3-\sqrt{6}}^{-3+\sqrt{6}} (x^2 + 6x + 3) dx = \frac{1}{6} \{(-3 + \sqrt{6}) - (-3 - \sqrt{6})\} = 8\sqrt{6}$$

(3) $a = 2$ のとき, $y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は, (1)(ii) のグラフに $a = 2$ を代入して

$$x = -2 \pm \sqrt{2}$$

また, $g(x) = x^2 + 4x + 2$ であるから, $g'(x) = 2x + 4$ より

$$g'(-2 + \sqrt{2}) = 2(-2 + \sqrt{2}) + 4 = 2\sqrt{2} > 2$$

点 $(-2 + \sqrt{2}, 0)$ が直線 $y = 2x + b$ の上側またはこの直線上にあるときで

$$0 \geq 2(-2 + \sqrt{2}) + b \quad \text{すなわち } b \leq 4 - 2\sqrt{2}$$

3 (1) ab の値の集合を M とすると

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 36\}$$

$m \in M$ に対する $ab = m$ となる組 (a, b) の個数を $S(m)$ とすると

m	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
$S(m)$	1	2	2	3	2	4	2	1	2	4
m	15	16	18	20	24	25	30	36		
$S(m)$	2	1	2	2	2	1	2	1		

また, cd の値の集合も M に等しい.

$ab \geq cd + 25 \geq 26$ より, ab は 30 または 36.

$$ab = 30 \text{ のとき } cd = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$ab = 36 \text{ のとき } cd = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$$

$$S(30) = 2, S(36) = 1,$$

$$S(1) + S(2) + S(3) + S(4) + S(5) = 1 + 2 + 2 + 3 + 2 = 10$$

$$S(6) + S(8) + S(9) + S(10) = 4 + 2 + 1 + 2 = 9$$

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{2 \times 10 + 1 \times (10 + 9)}{6^4} = \frac{13}{432}$$

(2) $S(m) = 1$ となる m は 1, 9, 16, 25, 36 の 5 通り

$S(m) = 2$ となる m は 2, 3, 5, 8, 10, 15, 18, 20, 24, 30 の 10 通り

$S(m) = 3$ となる m は 4 の 1 通り

$S(m) = 4$ となる m は 6, 12 の 2 通り

$$\text{よって, 求める確率は } \frac{1^2 \times 5 + 2^2 \times 10 + 3^2 \times 1 + 4^2 \times 2}{6^4} = \frac{43}{648}$$