平成 28 年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)80 分
文・法・経済・経営・国際文化・発達科学
(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・
医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ 四面体 OABC において，P を辺 OA の中点，Q を辺 OB を 2 : 1 に内分する点，R を辺 BC の中点とする．P，Q，R を通る平面と辺 AC の交点を S とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) 比 $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}| : |\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$ を求めよ．

(3) 四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を正の定数とし，$f(x) = |x^2 + 2ax + a|$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ．

(2) $y = f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 2)$ を通るときの a の値を求めよ．また，そのときの $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(3) $a = 2$ とする．すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 2x + b$ が成り立つような実数 b の取りうる値の範囲を求めよ．

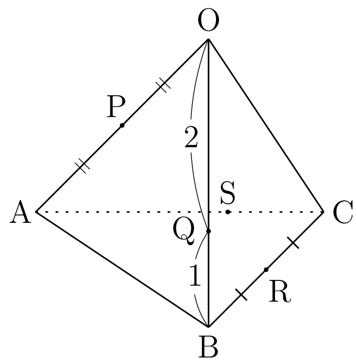
$\boxed{\mathbf{3}}$ さいころを 4 回振って出た目を順に a，b，c，d とする．以下の問に答えよ．

(1) $ab \geqq cd + 25$ となる確率を求めよ．

(2) $ab = cd$ となる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) 右の図から



$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$$= \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{1}{2}\vec{a} = \boldsymbol{\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}}$$

(2) S は平面 PQR 上の点であるから，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + s\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + t\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + \frac{t}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})$$

$$= \frac{1}{2}(1-s-t)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}s + \frac{t}{2}\right)\vec{b} + \frac{t}{2}\vec{c}$$

このとき，S は直線 AC 上の点であるから

$$\frac{1}{2}(1-s-t) + \frac{t}{2} = 1, \quad \frac{2}{3}s + \frac{t}{2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad s = -1,\ t = \frac{4}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$　よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{AS}}| : |\overrightarrow{\mathrm{SC}}| = 2 : 1}$

(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{QS}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c})$$

したがって
$$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2 = \frac{1}{9}|\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|^2$$
$$= \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 8\vec{b}\cdot\vec{c} + 4\vec{c}\cdot\vec{a})$$

このとき　$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot 1\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|^2 = \frac{1}{9}(1+4+4-2-4+2) = \frac{5}{9}$　よって　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{QS}}| = \frac{\sqrt{5}}{3}}$ ■

2 (1) $g(x) = x^2 + 2ax + a$ とおくと　$g(x) = (x+a)^2 - a^2 + a$

$a > 0$ に注意すると

(i) $-a^2 + a \geqq 0$，すなわち，$0 < a \leqq 1$ のとき，$g(x) \geqq 0$ であるから

$$f(x) = |g(x)| = g(x)$$

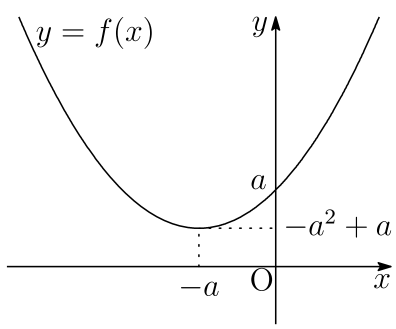
(ii) $-a^2 + a < 0$，すなわち，$1 < a$ のとき，

$g(x) = 0$ の解は　$x = -a \pm \sqrt{a^2 - a}$

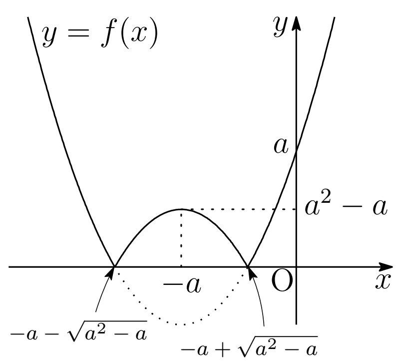
$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & (x \leqq -a - \sqrt{a^2 - a},\ -a + \sqrt{a^2 - a} \leqq x) \\ -g(x) & (-a - \sqrt{a^2 - a} \leqq x \leqq -a + \sqrt{a^2 - a}) \end{cases}$$

(i)，(ii) より，$y = f(x)$ のグラフは，次のようになる．

(i) $0 < a \leqq 1$ のとき



(ii) $1 < a$ のとき



(2) $y = f(x)$ が点 $(-1,\ 2)$ を通るから，$f(-1) = 2$ より

$$|1 - a| = 2 \quad \text{このとき}, a > 0 \text{に注意して解くと} \quad a = 3$$

(1) で示したグラフから，$y = f(x)$ と x 軸との交点の x 座標は　$-3 \pm \sqrt{6}$

よって　$-\displaystyle\int_{-3-\sqrt{6}}^{-3+\sqrt{6}} (x^2 + 6x + 3)\,dx = \frac{1}{6}\{(-3+\sqrt{6}) - (-3-\sqrt{6})\}^3 = \mathbf{8\sqrt{6}}$

(3) $a = 2$ のとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は，(1)(ii) のグラフに $a = 2$ を代入して

$$x = -2 \pm \sqrt{2}$$

また，$g(x) = x^2 + 4x + 2$ であるから，$g'(x) = 2x + 4$ より

$$g'(-2 + \sqrt{2}) = 2(-2 + \sqrt{2}) + 4 = 2\sqrt{2} > 2$$

点 $(-2 + \sqrt{2},\ 0)$ が直線 $y = 2x + b$ の上側またはこの直線上にあるときで

$$0 \geqq 2(-2 + \sqrt{2}) + b \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b \leqq 4 - 2\sqrt{2}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) ab の値の集合を M とすると

$$M=\{1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,16,18,20,24,25,30,36\}$$

$m\in M$ に対する $ab=m$ となる組 (a,b) の個数を $S(m)$ とすると

m	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
$S(m)$	1	2	2	3	2	4	2	1	2	4

m	15	16	18	20	24	25	30	36
$S(m)$	2	1	2	2	2	1	2	1

また，cd の値の集合も M に等しい．

$ab\geqq cd+25\geqq 26$ より，ab は 30 または 36.

$ab=30$ のとき　$cd=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

$ab=36$ のとき　$cd=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10$

$S(30)=2$，S(36)=1，

$S(1)+S(2)+S(3)+S(4)+S(5)=1+2+2+3+2=10$

$S(6)+S(8)+S(9)+S(10)=4+2+1+2=9$

よって，求める確率は　$\dfrac{2\times10+1\times(10+9)}{6^4}=\mathbf{\dfrac{13}{432}}$

(2) $S(m)=1$ となる m は $1,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36$ の 5 通り

$S(m)=2$ となる m は $2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 15,\ 18,\ 20,\ 24,\ 30$ の 10 通り

$S(m)=3$ となる m は 4 の 1 通り

$S(m)=4$ となる m は $6,\ 12$ の 2 通り

よって，求める確率は　$\dfrac{1^2\times5+2^2\times10+3^2\times1+4^2\times2}{6^4}=\mathbf{\dfrac{43}{648}}$　■