平成 27 年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)80 分
文・法・経済・経営・国際文化・発達科学
(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・
医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

1 s，t を $s < t$ をみたす実数とする．座標平面上の３点 A(1, 2)，B(s, s^2)，C(t, t^2) が一直線上にあるとする．以下の問に答えよ．

(1) s と t の間の関係式を求めよ．

(2) 線分 BC の中点を M(u, v) とする．u と v の間の関係式を求めよ．

(3) s，t が変化するとき，v の最小値と，そのときの u，s，t の値を求めよ．

2 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が $a_1 = 5$，$b_1 = 7$ をみたし，さらにすべての実数 x とすべての自然数 n に対して

$$x(a_{n+1}x + b_{n+1}) = \int_{c_n}^{x+c_n} (a_n t + b_n)\,dt$$

をみたすとする．以下の問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $c_n = 3^{n-1}$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $c_n = n$ のとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

3 a，b，c を１以上７以下の自然数とする．次の条件 $(*)$ を考える．

$(*)$ ３辺の長さが a，b，c である三角形と，３辺の長さが $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する．

以下の問に答えよ．

(1) $a = b > c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

(2) $a > b > c$ であり，かつ条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

(3) 条件 $(*)$ をみたす a，b，c の組の個数を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) A(1, 2)，B(s, s^2)，C(t, t^2) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (s-1, s^2-2), \quad \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (t-s)(1,\ s+t)$$

3 点 A，B，C が同一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であるから $(s<t)$

$$(s-1)(s+t)-(s^2-2)\cdot 1 = 0 \quad \text{整理すると} \quad \boldsymbol{st = s+t-2}$$

(2) 線分 BC の中点 M(u, v) は

$$u = \frac{s+t}{2}, \quad v = \frac{s^2+t^2}{2} \quad \cdots(*)$$

$(*)$ の第 1 式および (1) の結果から　$s+t = 2u,\ st = 2u-2 \quad \cdots(**)$

よって　$v = \dfrac{s^2+t^2}{2} = \dfrac{(s+t)^2-2st}{2} = \dfrac{(2u)^2-2(2u-2)}{2}$

$= \boldsymbol{2u^2-2u+2}$

(3) (2) の結果から　$v = 2\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$

したがって　$\boldsymbol{u = \dfrac{1}{2}}$ のとき v は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ をとる．

$u = \dfrac{1}{2}$ を $(**)$ に代入すると　$s+t=1, \quad st=-1$

2 数 s，t を解とする 2 次方程式は

$$x^2-x-1=0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$s<t$ であるから　$\boldsymbol{s = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}}$，$\boldsymbol{t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $x(a_{n+1}x+b_{n+1}) = \displaystyle\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)\,dt = \left[\,\frac{a_nt^2}{2}+b_nt\,\right]_{c_n}^{x+c_n}$

$= \dfrac{a_n}{2}(x^2+2c_nx)+b_nx = \dfrac{a_n}{2}x^2+(a_nc_n+b_n)x$

したがって　$a_{n+1}x^2+b_{n+1}x = \dfrac{a_n}{2}x^2+(a_nc_n+b_n)x$

同じ次数の項の係数が等しいから

$$(*)\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} \\ b_{n+1} = a_nc_n+b_n \end{cases}$$

$\{a_n\}$ は初項 $a_1=5$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから　$\boldsymbol{a_n = 5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}$

(2) $c_n = 3^{n-1}$ のとき，(1) の結果を (∗) の第 2 式に代入すると

$$b_{n+1} = 5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times 3^{n-1} + b_n \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} = b_n + 5\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$n \geqq 2$ のとき，$b_1 = 7$ より

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 5\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} = 7 + 5\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{2} - 1} \\ &= 7 + 10\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right\} = 10\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3 \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{b_n = 10\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 3}$

(3) $c_n = n$ のとき，(1) の結果を (∗) の第 2 式に代入すると

$$\text{ゆえに} \quad b_{n+1} = b_n + 5n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \cdots(**)$$

ここで，$r = \frac{1}{2}$ とし，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kr^{k-1}$ とおくと

$$\begin{aligned} rS_n &= \sum_{k=1}^{n} kr^k = \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)r^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)r^{k-1} + nr^n \\ &= S_n - \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} + nr^n \end{aligned}$$

したがって　$(1-r)S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} - nr^n = \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$

ゆえに　$(1-r)S_n = 2 - (n+2)r^n$　すなわち　$S_n = 4 - (n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(∗∗) より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + 5\sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 7 + 5S_{n-1} \\ &= 7 + 5\left\{4 - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} = 27 - 5(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

これは $n = 1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{b_n = 27 - 5(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) a, b, cは1以上7以下の自然数であるから，$a=b>c$のとき $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき $b+c>a$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

このとき，$a=b>c$であるから $\dfrac{2}{b}>\dfrac{1}{c}$ すなわち $2c>b>c$

ゆえに $c=1$ のとき $2>b>1$ より なし
$c=2$ のとき $4>b>2$ より $a=b=3$
$c=3$ のとき $6>b>3$ より $a=b=4,\ 5$
$c=4$ のとき $8>b>4$ より $a=b=5,\ 6,\ 7$
$c=5$ のとき $10>b>5$ より $a=b=6,\ 7$
$c=6$ のとき $12>b>6$ より $a=b=7$
$c=7$ のとき $14>b>7$ より なし

よって，求める組の個数は $1+2+3+2+1=\mathbf{9}$ (個)

(2) a, b, cは1以上7以下の自然数であるから，$a>b>c$のとき $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき $b+c>a$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

ゆえに $a-b<c$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$

このとき，$a>b>c$であるから $1\leqq c\leqq 5$

(i) $a>b>c=1$ のとき $a-b<1$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>1$

これをみたす $(a,\ b)$ の組はなし

(ii) $a>b>c=2$ のとき $a-b<2$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{2}$

よって，$(a,\ b)=(4,\ 3)$ の1個

(iii) $a>b>c=3$ のとき $a-b<3$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{3}$

よって，$(a,\ b)=(5,\ 4),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (7,\ 5)$ の4個

(iv) $a>b>c=4$ のとき $a-b<4$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{4}$

よって，$(a,\ b)=(6,\ 5),\ (7,\ 5),\ (7,\ 6)$ の3個

(v) $a>b>c=5$ のとき $a-b<5$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{5}$

よって，$(a,\ b)=(7,\ 6)$ の1個

したがって，求める組の個数は $1+4+3+1=\mathbf{9}$ (個)

(3) a, b, c は1以上7以下の自然数であるから，$a > b = c$ のとき　$\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$

条件 $(*)$ をみたすとき　　$b + c > a$　かつ　$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{c}$

このとき，$a > b = c$ であるから　$c + c > a$　すなわち　$2c > a > c$

これは (1) の個数に等しいから　9 (個)

また，$a = b = c$ となる個数は7個であるから，以上をまとめると

- $a = b > c$ の場合が9個であるから，
  $b = c > a$，$c = a > b$ の場合もそれぞれ9個
- $a > b = c$ の場合が9個であるから，
  $b > c = a$，$c > a = b$ の場合もそれぞれ9個
- $a > b > c$ の場合が9個であるから，
  $$a > c > b,\ b > a > c,\ b > a > c,\ c > a > b,\ c > b > a$$
  の場合もそれぞれ9個
- $a = b = c$ の場合が7個

よって，条件 $(*)$ をみたす a，b，c の個数は

$$9 \times 3 + 9 \times 3 + 9 \times 6 + 7 = \mathbf{115}\ \ (\text{個})$$