

平成26年度 神戸大学2次試験前期日程(数学問題)80分
 文・法・経済・経営・国際文化・発達科学
 (人間環境(文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・
 医(保健(理学療法・看護・作業療法))

- 1 2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の2つの解を α, β とし,

$$c_n = \alpha^n + \beta^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

とおく. 以下の間に答えよ.

- (1) n を2以上の自然数とするとき,

$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$$

となることを示せ.

- (2) 曲線 $y = c_1x^3 - c_3x^2 - c_2x + c_4$ の極値を求めよ.
 (3) 曲線 $y = c_1x^2 - c_3x + c_2$ と, x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

- 2 m, n ($m < n$) を自然数とし

$$a = n^2 - m^2, \quad b = 2mn, \quad c = n^2 + m^2$$

とおく. 三辺の長さが a, b, c である三角形の内接円の半径を r とし, その三角形の面積を S とする. このとき, 以下の間に答えよ.

- (1) $a^2 + b^2 = c^2$ を示せ.
 (2) r を m, n を用いて表せ.
 (3) r が素数のときに, S を r を用いて表せ.
 (4) r が素数のときに, S が6で割り切れることを示せ.

- 3 空間において, 原点 O を通らない平面 α 上に一辺の長さ1の正方形があり, その頂点を順に A, B, C, D とする. このとき, 以下の間に答えよ.

- (1) ベクトル \overrightarrow{OD} を, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を用いて表せ.
 (2) $OA = OB = OC$ のとき, ベクトル

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

が, 平面 α と垂直であることを示せ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) \quad \cdots (*)$$

α, β は2次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の解であるから、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -1$$

これらを (*) に代入すると

$$\alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha^n + \beta^n) + (\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

$c_n = \alpha^n + \beta^n$ であるから

$$c_{n+1} = c_n + c_{n-1} \quad \cdots (**)$$

$$(2) \quad \begin{aligned} c_1 &= \alpha + \beta = 1, & c_2 &= \alpha^2 + \beta^2 \\ & & &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ & & &= 1^2 - 2 \cdot (-1) = 3 \end{aligned}$$

$$(*) \text{ より } \quad c_3 = c_2 + c_1 = 3 + 1 = 4,$$

$$c_4 = c_3 + c_2 = 4 + 3 = 7$$

$$\text{したがって } \quad y = x^3 - 4x^2 - 3x + 7$$

$$y' = 3x^2 - 8x - 3 = (x - 3)(3x + 1)$$

x	\cdots	$-\frac{1}{3}$	\cdots	3	\cdots
y'	+	0	-	0	+
y	\nearrow	$\frac{203}{27}$	\searrow	-11	\nearrow

よって $x = -\frac{1}{3}$ のとき極大値 $\frac{203}{27}$, $x = 3$ のとき極小値 -11

$$(3) \quad y = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$$

よって、求める面積を S とすると

$$S = - \int_1^3 (x - 1)(x - 3) dx = \frac{1}{6}(3 - 1)^3 = \frac{4}{3}$$



- 2 (1) $a = n^2 - m^2$, $b = 2mn$, $c = n^2 + m^2$ より

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (n^2 - m^2)^2 + (2mn)^2 \\ &= n^4 + 2n^2m^2 + m^4 = (n^2 + m^2)^2 = c^2 \end{aligned}$$

- (2) (1)の結果から、斜辺の長さが c の直角三角形であるから、この三角形の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot (n^2 - m^2) \cdot 2mn = mn(n + m)(n - m)$$

三角形の内接円の半径が r であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(a + b + c)r \\ &= \frac{1}{2}\{(n^2 - m^2) + 2mn + (n^2 + m^2)\}r \\ &= n(n + m)r \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

したがって $n(n + m)r = mn(n + m)(n - m)$ よって $r = m(n - m)$

- (3) r が素数のとき、(2)の結果から $m = 1$ または $n - m = 1$

- (i) $m = 1$ のとき、これを(2)の結果に代入すると

$$r = 1(n - 1) \quad \text{ゆえに} \quad n = r + 1$$

これらを(*)に代入すると

$$S = (r + 1)\{(r + 1) + 1\}r = r(r + 1)(r + 2)$$

- (ii) $n - m = 1$ のとき、これを(2)の結果に代入すると

$$r = m \cdot 1 \quad \text{すなわち} \quad m = r, \quad n = r + 1$$

これらを(*)に代入すると

$$S = (r + 1)\{(r + 1) + r\}r = r(r + 1)(2r + 1)$$

よって $S = r(r + 1)(r + 2)$ または $S = r(r + 1)(2r + 1)$

- (4) $r(r + 1)(r + 2)$ は連続する3整数の積である。また

$$\begin{aligned} r(r + 1)(2r + 1) &= r(r + 1)\{(r - 1) + (r + 2)\} \\ &= (r - 1)r(r + 1) + r(r + 1)(r + 2) \end{aligned}$$

これは連続する3整数(2の倍数と3の倍数を含む)の積の和。

よって、(3)の結果から、 r が素数のとき、 S は6で割り切れる。 ■

3 (1) 四角形 ABCD は正方形であるから

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

(2) 正方形 ABCD の対角線の交点を G とし

$$\overrightarrow{OG} = \vec{g}, \quad \overrightarrow{GA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{GB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{GC} = -\vec{a}, \quad \overrightarrow{GD} = -\vec{b}$$

とすると

$$\overrightarrow{OA} = \vec{g} + \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{g} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{g} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{OD} = \vec{g} - \vec{b}$$

OA = OB = OC より, $|\overrightarrow{OA}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2$ であるから

$$|\vec{g} + \vec{a}|^2 = |\vec{g} + \vec{b}|^2 = |\vec{g} - \vec{a}|^2$$

このとき, $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ に注意して, 上式を整理すると

$$\vec{g} \cdot \vec{a} = \vec{g} \cdot \vec{b} = -\vec{g} \cdot \vec{a} \quad \text{ゆえに} \quad \vec{g} \cdot \vec{a} = \vec{g} \cdot \vec{b} = 0$$

また, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\vec{g}$ であるから

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

は, \vec{a} および \vec{b} と垂直, すなわち, 平面 α と垂直である.

別解 (1) の結果から $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot \overrightarrow{CA} &= 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}) \\ &= 2(|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2) = 0 \end{aligned}$$

2点 A, C の中点を M とすると $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OM}$

以上より, $OM \perp MC$ となる. これから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC}|^2 &= |\overrightarrow{OM}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2, \\ |\overrightarrow{OB}|^2 &= |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}|^2 = |\overrightarrow{OM}|^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MB} + |\overrightarrow{MB}|^2 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OB}|$, $|\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB}|$ であるから $OM \perp MB$

よって, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ は, 平面 α と垂直である. ■