平成26年度　神戸大学２次試験前期日程(数学問題)80分
文・法・経済・経営・国際文化・発達科学
(人間環境(文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・
医(保健(理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

1 2次方程式 $x^2-x-1=0$ の2つの解を α，β とし，

$$c_n=\alpha^n+\beta^n,\quad n=1,2,3,\cdots$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) n を2以上の自然数とするとき，

$$c_{n+1}=c_n+c_{n-1}$$

となることを示せ．

(2) 曲線 $y=c_1x^3-c_3x^2-c_2x+c_4$ の極値を求めよ．

(3) 曲線 $y=c_1x^2-c_3x+c_2$ と，x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

2 m，n $(m<n)$ を自然数とし

$$a=n^2-m^2,\quad b=2mn,\quad c=n^2+m^2$$

とおく．三辺の長さが a，b，c である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $a^2+b^2=c^2$ を示せ．

(2) r を m，n を用いて表せ．

(3) r が素数のときに，S を r を用いて表せ．

(4) r が素数のときに，S が6で割り切れることを示せ．

3 空間において，原点Oを通らない平面 α 上に一辺の長さ1の正方形があり，その頂点を順にA，B，C，Dとする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ のとき，ベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

が，平面 α と垂直であることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1)

$$\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=(\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}) \quad \cdots(*)$$

α，β は2次方程式 $x^2-x-1=0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=1, \quad \alpha\beta=-1$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=(\alpha^n+\beta^n)+(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$

$c_n=\alpha^n+\beta^n$ であるから

$$c_{n+1}=c_n+c_{n-1} \qquad \cdots(**)$$

(2)

$$\begin{aligned} c_1=\alpha+\beta=1, \quad c_2&=\alpha^2+\beta^2 \\ &=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &=1^2-2\cdot(-1)=3 \end{aligned}$$

$(*)$ より

$$\begin{aligned} c_3&=c_2+c_1=3+1=4, \\ c_4&=c_3+c_2=4+3=7 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} y&=x^3-4x^2-3x+7 \\ y'&=3x^2-8x-3=(x-3)(3x+1) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{203}{27}$	$\searrow$	-11	$\nearrow$

よって　$x=-\dfrac{1}{3}$ のとき極大値 $\boldsymbol{\dfrac{203}{27}}$，$x=3$ のとき極小値 $\boldsymbol{-11}$

(3) $y=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

よって，求める面積を S とすると

$$S=-\int_1^3(x-1)(x-3)\,dx=\frac{1}{6}(3-1)^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a=n^2-m^2$，$b=2mn$，$c=n^2+m^2$ より

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2 &= (n^2-m^2)^2+(2mn)^2 \\
&= n^4+2n^2m^2+m^4=(n^2+m^2)^2=c^2
\end{aligned}
$$

(2) (1) の結果から，斜辺の長さが c の直角三角形であるから，この三角形の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\cdot(n^2-m^2)\cdot 2mn=mn(n+m)(n-m)$$

三角形の内接円の半径が r であるから

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}(a+b+c)r \\
&= \frac{1}{2}\{(n^2-m^2)+2mn+(n^2+m^2)\}r \\
&= n(n+m)r \quad \cdots(*)
\end{aligned}
$$

したがって　$n(n+m)r=mn(n+m)(n-m)$　よって　$\boldsymbol{r=m(n-m)}$

(3) r が素数のとき，(2) の結果から　$m=1$　または　$n-m=1$

(i) $m=1$ のとき，これを (2) の結果に代入すると

$$r=1(n-1) \quad \text{ゆえに} \quad n=r+1$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$S=(r+1)\{(r+1)+1\}r=r(r+1)(r+2)$$

(ii) $n-m=1$ のとき，これを (2) の結果に代入すると

$$r=m\cdot 1 \quad \text{すなわち} \quad m=r,\quad n=r+1$$

これらを $(*)$ に代入すると

$$S=(r+1)\{(r+1)+r\}r=r(r+1)(2r+1)$$

よって　$\boldsymbol{S=r(r+1)(r+2)}$　または　$\boldsymbol{S=r(r+1)(2r+1)}$

(4) $r(r+1)(r+2)$ は連続する 3 整数の積である．また

$$
\begin{aligned}
r(r+1)(2r+1) &= r(r+1)\{(r-1)+(r+2)\} \\
&= (r-1)r(r+1)+r(r+1)(r+2)
\end{aligned}
$$

これは連続する 3 整数 (2 の倍数と 3 の倍数を含む) の積の和．
よって，(3) の結果から，r が素数のとき，S は 6 で割り切れる．　■

3 (1) 四角形 ABCD は正方形であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}} \quad ゆえに \quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって $$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$$

(2) 正方形 ABCD の対角線の交点を G とし

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\vec{g},\quad \overrightarrow{\mathrm{GA}}=\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{GB}}=\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{GC}}=-\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{GD}}=-\vec{b}$$

とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{g}+\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{g}+\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{g}-\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{g}-\vec{b}$$

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$ であるから

$$|\vec{g}+\vec{a}|^2=|\vec{g}+\vec{b}|^2=|\vec{g}-\vec{a}|^2$$

このとき，$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ に注意して，上式を整理すると

$$\vec{g}\cdot\vec{a}=\vec{g}\cdot\vec{b}=-\vec{g}\cdot\vec{a} \quad ゆえに \quad \vec{g}\cdot\vec{a}=\vec{g}\cdot\vec{b}=0$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=4\vec{g}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

は，$\vec{a}$ および $\vec{b}$ と垂直，すなわち，平面 α と垂直である．

別解 (1) の結果から $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$

したがって
$$\begin{aligned}2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}&=2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=2(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2)=0\end{aligned}$$

2 点 A，C の中点を M とすると $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}=4\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

以上より，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{MC}$ となる．これから

$$\begin{aligned}&|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MC}}|^2,\\&|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}+|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{MC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|$ であるから $\mathrm{OM}\perp\mathrm{MB}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ は，平面 α と垂直である． ■