平成 25 年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)80 分
文・法・経済・経営・国際文化・発達科学
(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・
医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

1 空間において，2 点 A(0, 1, 0)，B(−1, 0, 0) を通る直線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 P を ℓ 上に，点 Q を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル (3, 1, −1) と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ．

(2) 点 R を ℓ 上に，点 S を z 軸上にとる．$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル (0, 0, 1) の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ．

(3) R，S を (2) で求めた点とする．点 T を ℓ 上に，点 U を z 軸上にとる．また，$\vec{v} = (a,\ b,\ c)$ は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする．$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ．

2 a，b，c は実数とし，$a < b$ とする．平面上の相異なる 3 点 A$(a,\ a^2)$，B$(b,\ b^2)$，C$(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする．次の問いに答えよ．

(1) a を b，c を用いて表せ．

(2) $b - a \geqq 2$ が成り立つことを示せ．

(3) 斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A，B，C の座標をそれぞれ求めよ．

3 赤色，緑色，青色のさいころが各 2 個ずつ，計 6 個ある．これらを同時にふるとき，

赤色の 2 個のさいころの出た目の数 r_1，r_2 に対し　$R = |r_1 - r_2|$

緑色の 2 個のさいころの出た目の数 g_1，g_2 に対し　$G = |g_1 - g_2|$

青色の 2 個のさいころの出た目の数 b_1，b_2 に対し　$B = |b_1 - b_2|$

とする．次の問いに答えよ．

(1) R がとりうる値と，R がそれらの各値をとる確率をそれぞれ求めよ．

(2) $R \geqq 4$，$G \geqq 4$，$B \geqq 4$ が同時に成り立つ確率を求めよ．

(3) $RGB \geqq 80$ となる確率を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) P は直線 AB 上の点であるから，実数 α を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (0,\ 1,\ 0) + \alpha(-1, -1,\ 0) = (-\alpha,\ 1-\alpha,\ 0)$$

点 Q を $(0,\ 0,\ q)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (0,\ 0,\ q) - (-\alpha,\ 1-\alpha,\ 0) = (\alpha,\ \alpha-1,\ q)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1, -1)$ に平行であるから

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha-1}{1} = \frac{q}{-1} \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{3}{2},\ q = -\frac{1}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2},\ 0\right)$ であるから　$\mathbf{P}\left(\boldsymbol{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2},\ 0}\right)$, $\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{0,\ 0, -\frac{1}{2}}\right)$

(2) R は直線 AB 上の点であるから，実数 β を用いて　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = (-\beta,\ 1-\beta,\ 0)$

点 S を $(0,\ 0,\ s)$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} - \overrightarrow{\mathrm{OR}} = (\beta,\ \beta-1,\ s)$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1, -1,\ 0)$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ に垂直なベクトルの 1 つは

$$(1, -1,\ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ はこのベクトルと平行であるから　$\frac{\beta}{1} = \frac{\beta-1}{-1},\quad s = 0$

これを解いて　$\beta = \frac{1}{2}$　ゆえに　$\mathbf{R}\left(\boldsymbol{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0}\right)$, $\mathbf{S(0,\ 0,\ 0)}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{RS}} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2},\ 0\right)$ は $\vec{v} = (a,\ b,\ c)$ に垂直ではないから

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \neq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a - b \neq 0 \quad \cdots ①$$

T は直線 AB 上の点であるから，実数 t を用いて　$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = (-t,\ 1-t,\ 0)$

点 U を $(0,\ 0,\ u)$ とおくと　$\overrightarrow{\mathrm{TU}} = \overrightarrow{\mathrm{OU}} - \overrightarrow{\mathrm{OT}} = (t,\ t-1,\ u)$

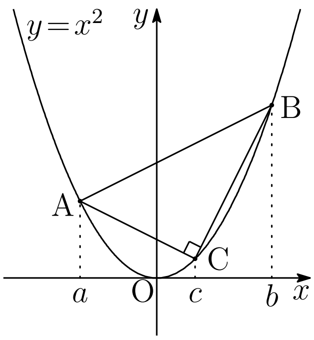
$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ は $\vec{v} = (a,\ b,\ c)$ に平行であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{TU}} = k\vec{v} \quad \text{ゆえに} \quad (t,\ t-1,\ u) = k(a,\ b,\ c)$$

したがって　$\begin{cases} t = ka \\ t - 1 = kb \\ u = kc \end{cases}$　ゆえに　$k(a-b) = 1$　① より　$k = \frac{1}{a-b}$

$t = \frac{a}{a-b},\ u = \frac{c}{a-b}$ より　$\mathbf{T}\left(\boldsymbol{\frac{a}{b-a},\ \frac{b}{b-a},\ 0}\right)$, $\mathbf{U}\left(\boldsymbol{0,\ 0,\ \frac{c}{a-b}}\right)$ ■

2 (1) 3 点 A$(a,\ a^2)$，B$(b,\ b^2)$，C$(c,\ c^2)$ は，放物線 $y=x^2$ 上の点である．



直線 BC の傾きは $\dfrac{c^2-b^2}{c-b}=b+c$

直線 AC の方程式は

$$y-c^2=-\frac{1}{b+c}(x-c)$$

点 A$(a,\ a^2)$ は，この直線上の点であるから $(a-c\neq 0)$

$$a^2-c^2=-\frac{a-c}{b+c} \quad ゆえに \quad a+c=-\frac{1}{b+c}$$

よって $\boldsymbol{a=-c-\dfrac{1}{b+c}}$

(2) (1) の結果から $b-a=b+c+\dfrac{1}{b+c}$

$b-a>0$ であるから，上式より $b+c>0$

したがって，相加平均・相乗平均の関係により

$$b-a=b+c+\frac{1}{b+c}\geqq 2\sqrt{(b+c)\cdot\frac{1}{b+c}}=2$$

(3) $\mathrm{AB}^2=(b-a)^2+(b^2-a^2)=(b-a)^2\{1+(a+b)^2\}$

上式より，AB が最小となるとき，(2) の結果に注意して

$$b-a=2,\ a+b=0 \quad すなわち \quad a=-1,\ b=1$$

これを (1) の結果に代入して

$$-1=-c-\frac{1}{1+c} \quad これを解いて \quad c=0$$

よって **A$(-1,\ 1)$，B$(1,\ 1)$，C$(0,\ 0)$，AB $=2$** ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) r_1，r_2 に対する $R = |r_1 - r_2|$ の値は，右の表のようになる．したがって，R のとりうる値とその確率は次のようになる．

$r_1 \backslash r_2$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$\boldsymbol{R}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
確率	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{5}{18}}$	$\mathbf{\frac{2}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{6}}$	$\mathbf{\frac{1}{9}}$	$\mathbf{\frac{1}{18}}$

(2) (1) の結果から，$R \geqq 4$ となる確率は $\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{18} = \dfrac{1}{6}$

同様に，$G \geqq 4$，$B \geqq 4$ となる確率はともに $\dfrac{1}{6}$

よって，求める確率は $\left(\dfrac{1}{6}\right)^3 = \mathbf{\dfrac{1}{216}}$

(3) $3{\cdot}5{\cdot}5 = 75$，$4^2{\cdot}5 = 80$ より，$RGB \geqq 80$ となる $\{R, G, B\}$ の組は

$$\{4,\ 4,\ 5\},\ \{4,\ 5,\ 5\},\ \{5,\ 5,\ 5\}$$

また，$R = G = B = 4$ となる確率は $\left(\dfrac{1}{9}\right)^3$

これと (2) の結果から，求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{9}\right)^3 = \frac{3^3 - 2^3}{18^3} = \mathbf{\frac{19}{5832}}$$

■