平成24年度　神戸大学２次試験前期日程 (数学問題)80分
文・法・経済・経営・国際文化・発達科学
(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・
医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

1 座標平面上に２点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ と直線 ℓ があり，A と ℓ の距離と B と ℓ の距離の和が１であるという．以下の問に答えよ．

(1) ℓ は y 軸と平行でないことを示せ．

(2) ℓ が線分 AB と交わるとき，ℓ の傾きを求めよ．

(3) ℓ が線分 AB と交わらないとき，ℓ と原点との距離を求めよ．

2 a を正の実数とする．２つの放物線

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 3a$$
$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2$$

が異なる２点で交わるとし，２つの放物線によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする．以下の問に答えよ．

(1) a の値の範囲を求めよ．

(2) $S(a)$ を a を用いて表せ．

(3) $S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ．

3 以下の問に答えよ．

(1) 正の実数 x，y に対して

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geqq 2$$

が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ．

(2) n を自然数とする．n 個の正の実数 $a_1, \cdots, a_n$ に対して

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2$$

が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) y 軸と平行な直線 ℓ の方程式を $x=k$ とおくと (k は定数)

$$\begin{array}{ll} \text{A}(1,\ 0) \text{ と } \ell \text{ の距離は} & |k-1| \\ \text{B}(-1,\ 0) \text{ と } \ell \text{ の距離は} & |k+1| \end{array}$$

一般に，2 つの実数 a，b について

$$|a|+|b| = \max(|a+b|, |a-b|)$$

であるから，$a=k-1$，$b=k+1$ とすると

$$|k-1|+|k+1| = \max(|2k|,\ 2)$$

$|k-1|+|k+1| \geqq 2$ であるから，このとき，A と ℓ の距離と B と ℓ の距離の和が 2 以上となり，条件に反する．よって，ℓ は y 軸と平行でない．

(2) ℓ の傾きを m とし，その方程式を $mx-y+n=0$ とすると，条件から

$$\frac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

したがって
$$\frac{|m+n|+|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \quad \cdots(*)$$

ここで，$f(x,\ y)=mx-y+n$ とおくと

$$f(1,\ 0)=m+n, \quad f(-1,\ 0)=-m+n$$

ℓ が線分 AB と交わるから

$$f(1,\ 0)f(-1,\ 0) \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (m+n)(-m+n) \leqq 0$$

このとき　$|m+n|+|-m+n| = |(m+n)-(-m+n)| = |2m|$

これを $(*)$ に代入して　$\dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$　よって　$\boldsymbol{m = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(3) ℓ と原点の距離を d とすると　$d = \dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}$

ℓ が線分 AB と交わらないから

$$f(1,\ 0)f(-1,\ 0) \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (m+n)(-m+n) \geqq 0$$

このとき　$|m+n|+|-m+n| = |(m+n)+(-m+n)| = |2n|$

これを $(*)$ に代入して　$\dfrac{|2n|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$　よって　$d = \dfrac{|n|}{\sqrt{m^2+1}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 2つの放物線の方程式から y を消去すると

$$\frac{1}{2}x^2 - 3a = -\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2$$

整理すると　　$(x-a)^2 = 3a - a^3 \quad \cdots①$

2つの放物線が2点で交わる条件は

$$3a - a^3 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3}) < 0$$

a は正であるから　　$\boldsymbol{0 < a < \sqrt{3}}$

(2) 2つの放物線の交点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とすると，① より

$$\alpha = a - \sqrt{3a - a^3}, \quad \beta = a + \sqrt{3a - a^3}$$

したがって

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_\alpha^\beta \left\{-\frac{1}{2}x^2 + 2ax - a^3 - a^2 - \left(\frac{1}{2}x^2 - 3a\right)\right\} dx \\ &= -\int_\alpha^\beta \{(x-a)^2 - (3a - a^3)\}\, dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\, dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6}(2\sqrt{3a - a^3})^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}(3a - a^3)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

(3) $f(a) = 3a - a^3\ (0 \leqq a \leqq \sqrt{3})$ とおくと

$$f'(a) = -3a^2 + 3 = -3(a+1)(a-1)$$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

$S(a) = \dfrac{4}{3}\{f(a)\}^{\frac{3}{2}}$ であるから，$S(a)$ の最大値は

$$\boldsymbol{a = 1} \text{ のとき，最大値 } \frac{4}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{8}{3}\sqrt{2}}$$

■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}-2=\left(\sqrt{\dfrac{y}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{y}}\right)^2 \geqq 0$　ゆえに　$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y} \geqq 2$

なお，等号が成立するための条件は

$$\sqrt{\frac{y}{x}}=\sqrt{\frac{x}{y}} \quad \text{すなわち} \quad x=y$$

(2) $a_1+a_2+\cdots+a_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j$，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k}$ より

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_j}{a_k} = \sum_{\substack{1\leqq j\leqq n \\ 1\leqq k\leqq n}} \frac{a_j}{a_k} \\
&= \sum_{1\leqq j<k\leqq n} \frac{a_j}{a_k} + \sum_{1\leqq k<j\leqq n} \frac{a_j}{a_k} + \sum_{1\leqq j=k\leqq n} \frac{a_j}{a_k} \\
&= \sum_{1\leqq j<k\leqq n} \frac{a_j}{a_k} + \sum_{1\leqq j<k\leqq n} \frac{a_k}{a_j} + n = \sum_{1\leqq j<k\leqq n} \left(\frac{a_j}{a_k}+\frac{a_k}{a_j}\right) + n \\
&\geqq \sum_{1\leqq j<k\leqq n} 2 + n = {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 2 + n = n^2
\end{aligned}$$

よって　$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right) \geqq n^2$

なお，等号が成立するための条件は，$1 \leqq j < k \leqq n$ について　$a_j = a_k$

すなわち　$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

解説

$a>0,\ b>0$ のとき　$a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$
よって　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$　$\cdots(*)$　(等号は $a=b$ のとき成立する)
$a_k>0\ (k=1,2,\cdots,n)$ のとき

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \quad \cdots(**)$$

(等号は $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のとき成立する)

が成り立つことを示す．$(*)$ より

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3+a_4 &\geqq 2(\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}) \\ &\geqq 4\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}=4\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} \end{aligned}$$

同様のことを繰り返すと，$n=2^k$ のときに $(**)$ が成立することが示される．
$n=2^k$ のときは $2^{k-1}<n<2^k$ となる k に対して，$n+m=2^k$ となるように m を定め，$a_1+a_2+\cdots+a_n=np$ とおくと

$$\frac{1}{n+m}(\overbrace{a_1+a_2+\cdots+a_n}^{n\text{ 個}}+\overbrace{p+\cdots+p}^{m\text{ 個}}) \geqq \sqrt[n+m]{a_1a_2\cdots a_np^m}$$

左辺は $\dfrac{1}{n+m}(np+mp)=p$ であるから

$$\begin{aligned} p &\geqq \sqrt[n+m]{a_1a_2\cdots a_np^m} \\ p^{n+m} &\geqq a_1a_2\cdots a_np^m \\ p^n &\geqq a_1a_2\cdots a_n \end{aligned}$$

よって，すべての自然数 n について，$(**)$ が成立する．
n 個の正の実数 $a_1,\ a_2,\cdots,a_n$ の相加平均 A，相乗平均 G，調和平均 H は

$$A=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\quad G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\quad \frac{1}{H}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

相加平均 $\geqq$ 相乗平均 の大小関係を $\dfrac{1}{a_1},\ \dfrac{1}{a_2},\cdots,\dfrac{1}{a_n}$ に適用すると

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{H} \geqq \frac{1}{G}$$

よって　$A \geqq G \geqq H$　(等号が成立する条件は，$a_1=a_2=\cdots=a_n$)
本題の左辺から　　$nA\cdot\dfrac{n}{H}=n^2\cdot\dfrac{A}{H} \geqq n^2$
上式の等号が成立する条件は，$A=H$，すなわち，$a_1=a_2=\cdots a_n$ $\blacksquare$