平成 23 年度　神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分
文・法・経済・経営・国際文化・発達科学
(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・
医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

1 実数 x，y に対して，等式

$$x^2 + y^2 = x + y \quad \cdots ①$$

を考える．$t = x + y$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) ① の等式が表す xy 平面上の図形を図示せよ．

(2) x と y が ① の等式をみたすとき，t のとりうる値の範囲を求めよ．

(3) x と y が ① の等式をみたすとする．

$$F = x^3 + y^3 - x^2y - xy^2$$

を t を用いた式で表せ．また，F のとりうる値の最大値と最小値を求めよ．

2 xy 平面上に相異なる 4 点 A，B，C，D があり，線分 AC と BD は原点 O で交わっている．点 A の座標は (1, 2) で，線分 OA と OD の長さは等しく，四角形 ABCD は円に内接している．$\angle \mathrm{AOD} = \theta$ とおき，点 C の x 座標を a，四角形 ABCD の面積を S とする．以下の問に答えよ．

(1) 線分 OC の長さを a を用いた式で表せ．また，線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ．

(2) S を a と θ を用いた式で表せ．

(3) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ とし，$20 \leqq S \leqq 40$ とするとき，a のとりうる値の最大値を求めよ．

3 袋の中に 0 から 4 までの数字のうち 1 つが書かれたカードが 1 枚ずつ合計 5 枚入っている．4 つの数 0，3，6，9 をマジックナンバーと呼ぶことにする．次のようなルールをもつ，1 人で行うゲームを考える．

［ルール］袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出していく．ただし，一度取り出したカードは袋に戻さないものとする．取り出したカードの数字の合計がマジックナンバーになったとき，その時点で負けとし，それ以降はカードを取り出さない．途中で負けとなることなく，すべてのカードを取り出せたとき，勝ちとする．

以下の問に答えよ．

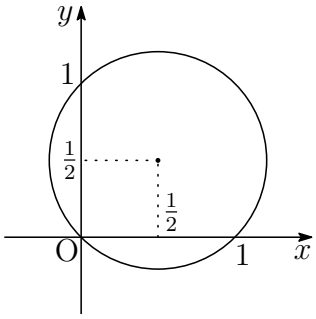
(1) 2 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ．

(2) 3 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ．

(3) このゲームで勝つ確率を求めよ．

解答例

1 (1)
$$x^2+y^2=x+y \quad \cdots ①$$



これを変形すると

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

よって，中心 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円

(2) 円 ① の中心 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ と直線 $x+y-t=0$ との距離を d とすると

$$d=\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-t\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|t-1|}{\sqrt{2}}$$

① の半径 r は $\frac{1}{\sqrt{2}}$，このとき，$d \leqq r$ であるから

$$\frac{|t-1|}{\sqrt{2}} \leqq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{0 \leqq t \leqq 2}$$

別解 2 次方程式 $u^2-(x+y)u+xy=0$ の解 $x,\ y$ が実数解であるとき

$$D=(x+y)^2-4xy \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 4xy \leqq t^2$$

① より　$(x+y)^2=2xy+x+y$　ゆえに　$2xy=t^2-t$

xy を消去すると　$2(t^2-t) \leqq t^2$　これを解いて　$0 \leqq t \leqq 2$

(3) ① より　$2xy=t^2-t$

$$\begin{aligned} F &= x^3+y^3-x^2y-xy^2 \\ &= (x+y)^3-2\cdot 2xy(x+y) \\ &= t^3-2(t^2-t)t=\boldsymbol{-t^3+2t^2} \end{aligned}$$

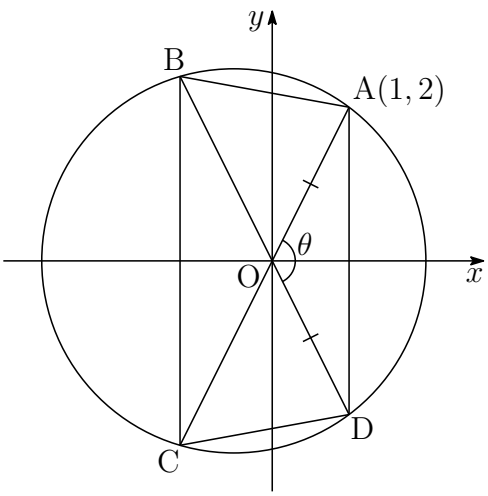
$$\frac{dF}{dt}=-3t^2+4t=-t(3t-4)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$\frac{dF}{dt}$		$+$	0	$-$	
F	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0

よって，F は $t=\frac{4}{3}$ で最大値 $\boldsymbol{\frac{32}{27}}$，$t=0,\ 2$ で最小値 $\mathbf{0}$ をとる． ■

2 (1) 点 C は直線 OA : $y = 2x$ 上にあり，
C の x 座標が a より　$\mathrm{C}(a,\ 2a)$
C は原点 O に関して A と反対側にあるから　　$a < 0$

よって　$\mathrm{OC} = \sqrt{a^2 + (2a)^2}$
$= \sqrt{5}|a| = \boldsymbol{-\sqrt{5}a}$



方べきの定理により

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC} = \mathrm{OB}\cdot\mathrm{OD}$$

条件により，OA = OD であるから

$$\mathrm{OB} = \mathrm{OC}$$

(2) (1) の結果から　$\mathrm{AC} = \mathrm{BD} = \mathrm{OA} + \mathrm{OC} = \sqrt{5} + (-\sqrt{5}a) = \sqrt{5}(1-a)$

よって　　$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}\sin\theta = \boldsymbol{\dfrac{5}{2}(1-a)^2\sin\theta}$

(3) (2) の結果から，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ より　$S = \dfrac{5}{4}(1-a)^2$

$20 \leqq S \leqq 40$ のとき

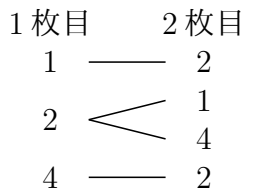
$$20 \leqq \frac{5}{4}(1-a)^2 \leqq 40 \quad \text{ゆえに} \quad 4 \leqq |1-a| \leqq 4\sqrt{2}$$

$a < 0$ より，$1 - a > 0$ であるから

$$4 \leqq 1 - a \leqq 4\sqrt{2} \quad \text{これを解いて} \quad 1 - 4\sqrt{2} \leqq a \leqq -3$$

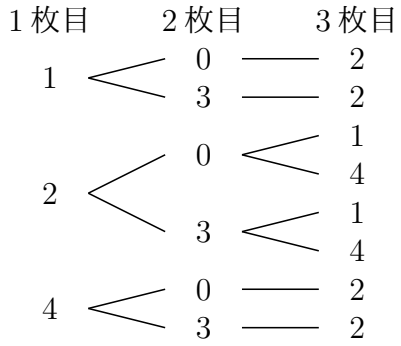
よって，a のとりうる値の最大値は　$\boldsymbol{-3}$ ■

3 (1) n 枚目 $(n = 0, 1, 2, 3, 4)$ のカードを取り出したところで負けとなる確率を p_n とする．
2 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは，右のような場合で，求める確率は



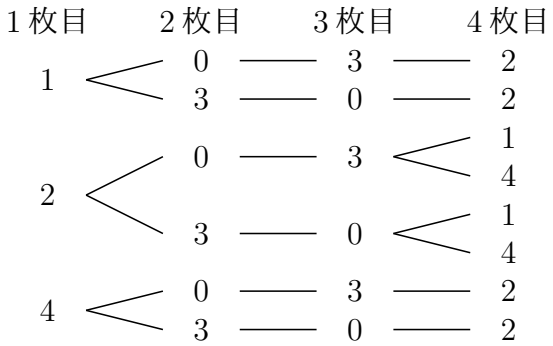
$$p_2 = \frac{4}{5 \cdot 4} = \mathbf{\frac{1}{5}}$$

(2) 3 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは，右のような場合で，求める確率は



$$p_3 = \frac{8}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \mathbf{\frac{2}{15}}$$

(3) 4 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは，右のような場合で，その確率は



$$p_4 = \frac{8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{15}$$

1 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは，0 または 3 のカードを取り出す確率であるから

$$p_1 = \frac{2}{5}$$

よって，このゲームで勝つ確率は

$$1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 1 - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15}\right) = \mathbf{\frac{1}{5}}$$

別解 5枚のカードを，0，0，1，1，2とし，数0，3をマジックナンバーとする．

(1) 2枚のカードを取り出したところで負けとなるのは

$$1-2,\quad 2-1$$

よって　$p_2=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{5}$

(2) 3枚のカードを取り出したところで負けとなるのは

$$1-0-2,\quad 2-0-1$$

よって　$p_3=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{15}$

(3) 4枚のカードを取り出したところで負けとなるのは

$$1-0-0-2,\quad 2-0-0-1$$

よって　$p_4=\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{2}=\dfrac{1}{15}$

$p_1=\dfrac{2}{5}$ であるから，求める確率は

$$1-(p_1+p_2+p_3+p_4)=1-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\right)=\frac{1}{5}$$

■