

平成 20 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

1 x の 2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ とその導関数 $f'(x)$ について、次の問に答えよ。ただし、 a, b, c は定数で $a \neq 0$ とする。

(1) 実数 α, β について、 $f(\alpha) = f(\beta)$ ならば

$|f'(\alpha)| = |f'(\beta)|$ であることを示せ。

(2) 実数 α, β について、 $|f'(\alpha)| = |f'(\beta)|$ ならば

$f(\alpha) = f(\beta)$ であることを示せ。

2 1 から n までの自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ の和を S とするとき、次の問に答えよ。

(1) n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば、 S が偶数であることを示せ。

(2) S が偶数ならば、 n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。

(3) n を 8 で割った余りが 3 または 4 ならば、 S が 4 の倍数でないことを示せ。

3 次の問に答えよ。

(1) xy 平面において、円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 2c^2$ と直線 $y = x$ が共有点をもたないための a, b, c の条件を求めよ。ただし、 a, b, c は定数で $c \neq 0$ とする。

(2) 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の数を、順に a, b, c とする。 a, b, c が (1) で求めた条件をみたす確率を求めよ。

解答例

- 1 (1) $ax^2 + bx + c = a(x - p)^2 + q$ とすると

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \quad f'(x) = 2a(x - p)$$

$\alpha = \beta$ のときは自明であるから, $\alpha \neq \beta$ とする.

$f(\alpha) = f(\beta)$ とすると

$$a(\alpha - p)^2 + q = a(\beta - p)^2 + q$$

$a \neq 0$ に注意して $\alpha - p = -(\beta - p)$

上式より $|2a(\alpha - p)| = |2a(\beta - p)|$ よって $|f'(\alpha)| = |f'(\beta)|$

- (2) $|f'(\alpha)| = |f'(\beta)|$ より, $a \neq 0$ に注意して

$$|2a(\alpha - p)| = |2a(\beta - p)| \quad \text{ゆえに} \quad |\alpha - p| = |\beta - p|$$

したがって $a(\alpha - p)^2 + q = a(\beta - p)^2 + q$ よって $f(\alpha) = f(\beta)$ ■

- 2 (1) $S = 1 + 2 + 3 \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad \cdots (*)$

n を 4 で割った余りが 0 のとき, $\frac{n}{4}$ は整数であるから

$$S = 2 \times \frac{n}{4}(n+1) \quad \text{ゆえに} \quad S \text{ は偶数}$$

n を 4 で割った余りが 3 のとき, $\frac{n+1}{4}$ は整数であるから

$$S = 2 \times n \cdot \frac{n+1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad S \text{ は偶数}$$

- (2) n と $n+1$ は偶奇が異なるから, S が偶数ならば, $(*)$ より, n または $n+1$ が 4 の倍数, すなわち, n を 4 で割った余りが 0 または 3 である.

- (3) (i) n を 8 で割った余りが 3 のとき, 整数 k を用いて, $n = 8k + 3$ とおいて, これを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(8k+3)(8k+4) = 2(8k+3)(2k+1) \\ &= 2(16k^2 + 14k + 3) = 4(8k^2 + 7k + 1) + 2 \end{aligned}$$

- (ii) n を 8 で割った余りが 3 のとき, 整数 l を用いて, $n = 8l + 4$ とおいて, これを $(*)$ に代入すると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(8l+4)(8l+5) = 2(2l+1)(8l+5) \\ &= 2(16l^2 + 18l + 5) = 4(8l^2 + 9l + 2) + 2 \end{aligned}$$

- (i), (ii) より, S は 4 の倍数ではない. ■

- 3** (1) 円の中心 (a, b) から直線 $y = x$ までの距離 d は $d = \frac{|a - b|}{\sqrt{2}}$

円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 2c^2$ の半径 r は $r = \sqrt{2}c$

この円と直線 $y = x$ が共有点をもたないとき, $d > r$ より

$$\frac{|a - b|}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}c \quad \text{よって} \quad |a - b| > 2c$$

- (2) $|a - b|$ の値は右の表のようになる.

条件を満たす c は $c = 1, 2$

- (i) $c = 1$ のとき $|a - b| > 2$

これを満たす (a, b) の組は 12 組

- (ii) $c = 2$ のとき $|a - b| > 4$

これを満たす (a, b) の組は 2 組

よって, 求める確率は $\frac{12 + 2}{6^3} = \frac{7}{108}$

$a \backslash b$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

