

平成 18 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

問題 1 2 3

- 1 平面上に原点 O から出る、相異なる 2 本の半直線 OX , OY をとり、 $\angle XOY < 180^\circ$ とする. 半直線 OX 上に O と異なる点 A を, 半直線 OY 上に O と異なる点 B をとり, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく. 次の問に答えよ.

- (1) 点 C が $\angle XOY$ の二等分線上にあるとき, ベクトル $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ はある実数 t を用いて

$$\vec{c} = t \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

と表されることを示せ.

- (2) $\angle XOY$ の二等分線と $\angle XAB$ の二等分線の交点を P とおく.
 $OA = 2$, $OB = 3$, $AB = 4$ のとき, $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ を, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ.

- 2 実数 t に対して xy 平面上の直線 $\ell_t: y = 2tx - t^2$ を考える. 次の問に答えよ.

- (1) 点 P を通る直線 ℓ_t はただ 1 つであるとする. このような点 P の軌跡の方程式を求めよ.
- (2) t が $|t| \geq 1$ の範囲を動くとき, 直線 ℓ_t が通る点 (x, y) の全体を図示せよ.

- 3 $\alpha = \frac{3 + \sqrt{7}i}{2}$ とする. ただし, i は虚数単位である. 次の問に答えよ.

- (1) α を解にもつような 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ (p, q は実数) を求めよ.
- (2) 整数 a, b, c を係数とする 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ について, 解の 1 つは α であり, また $0 \leq x \leq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする. このような整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ.

解答例

- 1 (1) $\overrightarrow{OA'} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\overrightarrow{OB'} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$ とおくと, 四角形 $OA'C'B$ はひし形で, OC' は $\angle A'OB'$ の二等分線である. よって, 実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OC'} = t \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

- (2) 点 P は $\angle XOY$ の二等分線上の点であるから,
(1) の結果を用いて

$$\overrightarrow{OP} = t \left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{3} \right) = \frac{t}{2}\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b}$$

点 P は $\angle XAB$ の二等分線上の点であるから,
実数 s を用いて

$$\overrightarrow{OP} = \vec{a} + s \left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{4} \right) = \left(1 + \frac{s}{4} \right) \vec{a} + \frac{s}{4} \vec{b}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立であるから

$$\frac{t}{2} = 1 + \frac{s}{4}, \quad \frac{t}{3} = \frac{s}{4} \quad \text{これを解いて} \quad s = 8, \quad t = 6$$

よって $\overrightarrow{OP} = 6 \left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{3} \right) = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ ■

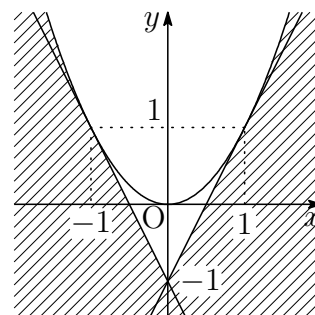
- 2 (1) 点 $P(x, y)$ が $\ell_t: y = 2tx - t^2$ を通るただ 1 つの点であるとき, t に関する 2 次方程式

$$t^2 - 2xt + y = 0$$

の係数について, $D = 0$ であるから, 求める軌跡は

$$D/4 = (-x)^2 - y = 0 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2$$

- (2) (1) で求めた曲線 $y = x^2$ は $\ell_t: y = 2tx - t^2$ の境界線 (接線群の包絡線) であるから, $|t| \geq 1$ のとき ℓ_t が通る領域は, 右の図の斜線部分で, 境界線を含む.



- 3** (1) α は 2 次方程式 (*) $x^2 + px + q = 0$ の解であるから $\alpha^2 + p\alpha + q = 0$
両辺の共役複素数をとると, p, q は実数であることに注意して

$$\overline{\alpha^2 + p\alpha + q} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\overline{\alpha})^2 + p\overline{\alpha} + q = 0$$

$\alpha, \overline{\alpha}$ は 2 次方程式 (*) の解であるから, 解と係数の関係により

$$\frac{3 + \sqrt{7}i}{2} + \frac{3 - \sqrt{7}i}{2} = -p, \quad \frac{3 + \sqrt{7}i}{2} \times \frac{3 - \sqrt{7}i}{2} = q$$

ゆえに $p = -3, q = 4$ よって $x^2 - 3x + 4 = 0$

- (2) 実係数の 3 次方程式 (**) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が α を解にもつから

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

両辺の共役複素数をとると

$$\overline{\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\overline{\alpha})^3 + a(\overline{\alpha})^2 + b\overline{\alpha} + c = 0$$

$\alpha, \overline{\alpha}$ は 3 次方程式 (**) の解であるから, (1) の結果から

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(x + \frac{c}{4}\right)(x^2 - 3x + 4) \\ &= x^3 + \left(\frac{c}{4} - 3\right)x^2 + \left(4 - \frac{3}{4}c\right)x + c \end{aligned}$$

方程式 (**) の解が $0 \leq x \leq 1$ にあり, これらの係数が整数であるから

$$c = 0 \text{ のとき } a = -3, b = 4$$

$$c = -4 \text{ のとき } a = -4, b = 7$$

よって $(a, b, c) = (-3, 4, 0), (-4, 7, -4)$ ■