

## 平成 17 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

## 問題 1 2 3

- 1 三角形 OAB において、辺 OA、辺 OB の長さをそれぞれ  $a, b$  とする。また、角 AOB は直角ではないとする。2 つのベクトル  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OB}$  の内積  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  を  $k$  とおく。次の問に答えよ。

- (1) 直線 OA 上に点 C を、 $\overrightarrow{BC}$  が  $\overrightarrow{OA}$  と垂直になるようにとる。 $\overrightarrow{OC}$  を  $a, k, \overrightarrow{OA}$  を用いて表せ。
- (2)  $a = \sqrt{2}, b = 1$  とする。直線 BC 上に点 H を、 $\overrightarrow{AH}$  が  $\overrightarrow{OB}$  と垂直になるようにとる。 $\overrightarrow{OH} = u\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OB}$  とおくと、 $u$  と  $v$  をそれぞれ  $k$  で表せ。

- 2  $a$  を正の実数とする。関数  $f(x) = ax^2 + (1 - 2a)x$  が次の 2 つの条件

- (i)  $-3 \leq x < 0$  のとき、 $f(x) \geq -1$   
 (ii)  $x \geq 0$  のとき、 $f(x) \geq 0$

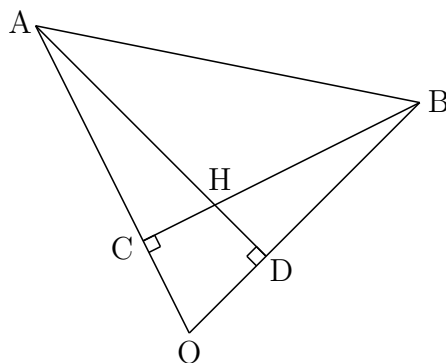
をともに満たすような  $a$  の値の範囲を求めよ。

- 3  $a$  を正の実数とする。次の問に答えよ。

- (1)  $y = |x^2 - a|x||$  のグラフをかけ。
- (2)  $F(a) = \int_{-1}^1 |x^2 - a|x| dx$  を求めよ。
- (3)  $F(a)$  の最小値を求めよ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad \overrightarrow{OC} = \frac{(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2} \overrightarrow{OA} = \frac{k}{a^2} \overrightarrow{OA}$$



(2) 2 直線 AH と OB の交点を D とすると

$$\overrightarrow{OD} = \frac{(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OB}|^2} \overrightarrow{OB} = \frac{k}{b^2} \overrightarrow{OB}$$

$a = \sqrt{2}$ ,  $b = 1$  のとき, (1) の結果および上式より

$$\overrightarrow{OC} = \frac{k}{2} \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OD} = k \overrightarrow{OB}$$

$\overrightarrow{OH} = u \overrightarrow{OA} + v \overrightarrow{OB}$  より

$$\overrightarrow{OH} = u \overrightarrow{OA} + \frac{v}{k} \overrightarrow{OD}, \quad \overrightarrow{OH} = \frac{2u}{k} \overrightarrow{OC} + v \overrightarrow{OB}$$

H は直線 AD および直線 BC 上の点であるから

$$(*) \quad u + \frac{v}{k} = 1, \quad \frac{2u}{k} + v = 1$$

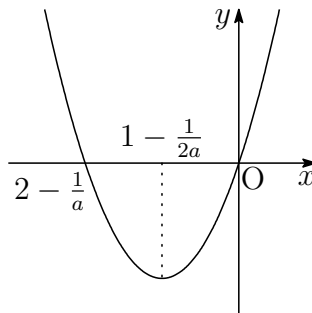
$$\text{ここで} \quad k^2 = (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2 < |\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 = a^2 b^2 = 2$$

これに注意すると, (\*) の 2 式から

$$u = \frac{k(k-1)}{k^2-2}, \quad v = \frac{k(k-2)}{k^2-2}$$

■

**2**  $f(x) = ax^2 + (1 - 2a)x$  より  $f(x) = a \left( x - 1 + \frac{1}{2a} \right)^2 - a \left( 1 - \frac{1}{2a} \right)^2$



条件 (ii) および  $a > 0$  に注意して、次の場合分けを行う.

[1]  $-3 \leq 1 - \frac{1}{2a} \leq 0$ , すなわち,  $\frac{1}{8} \leq a \leq \frac{1}{2}$  のとき

$$f\left(1 - \frac{1}{2a}\right) = -a \left(1 - \frac{1}{2a}\right)^2 \geq -1$$

整理すると  $4a^2 - 8a + 1 \leq 0$  すなわち  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$

[2]  $1 - \frac{1}{2a} < -3$ , すなわち,  $0 < a < \frac{1}{8}$  のとき

$$f(-3) = 15a - 3 \geq -1 \quad \text{ゆえに} \quad a \geq \frac{2}{15}$$

これは,  $0 < a < \frac{1}{8}$  を満たさないから, 不適.

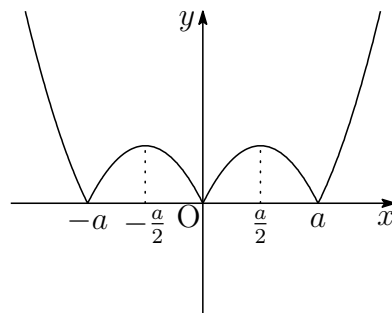
[1], [2] より  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$



**3** (1)  $y = |x^2 - a|x||$  より

$$x \geq 0 \text{ のとき } y = |x(x - a)|$$

$$x \leq 0 \text{ のとき } y = |x(x + a)|$$



(2) (1) のグラフは  $y$  軸に関して対称であるから

$$F(a) = 2 \int_0^1 |x^2 - ax| dx$$

(i)  $0 < a \leq 1$  のとき

$$\begin{aligned} F(a) &= -2 \int_0^a (x^2 - ax) dx + 2 \int_a^1 (x^2 - ax) dx \\ &= -2 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^a + 2 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_a^1 \\ &= \frac{2}{3}a^3 - a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(ii)  $1 \leq a$  のとき

$$\begin{aligned} F(a) &= -2 \int_0^1 (x^2 - ax) dx = -2 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right]_0^1 \\ &= a - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$(3) (2) \text{ の結果から } F'(a) = \begin{cases} 2a^2 - 1 & (0 < a \leq 1) \\ 1 & (1 \leq a) \end{cases}$$

|         |   |            |                      |            |
|---------|---|------------|----------------------|------------|
| $a$     | 0 | $\cdots$   | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\cdots$   |
| $F'(a)$ |   | $-$        | 0                    | $+$        |
| $F(a)$  |   | $\searrow$ | 極小                   | $\nearrow$ |

よって、求める最小値は  $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$

■