

平成 15 年度 神戸大学 2 次試験前期日程 (数学問題)80 分

文・法・経済・経営・国際文化・発達科学

(人間環境 (文科系)・人間形成・人間行動・人間表現)・

医 (保健 (理学療法・看護・作業療法))

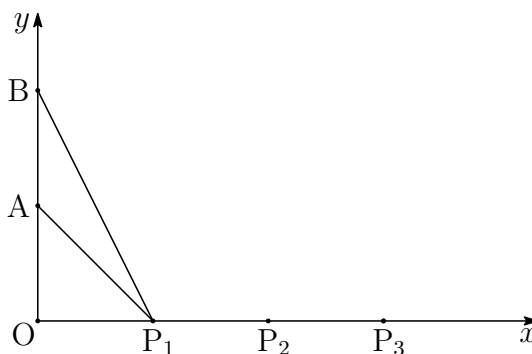
問題 1 2 3

- 1 複素数平面上の 3 点 $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ は正三角形の頂点であり, 左まわり (反時計まわり) に並んでいるとする. 次の問に答えよ.

- (1) 2 つの複素数 $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$, $\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ の値を求めよ.
- (2) $z_1 = 2i$, $z_2 = -2 - 2\sqrt{2}i$ のとき, z_3 の値を求めよ. ただし, i は虚数単位とする.

- 2 座標平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(0, 2)$ をとる. 自然数 k に対し点 P_k の座標を $(k, 0)$ とする. 自然数 n に対し, $2n$ 本の線分 $AP_1, AP_2, \dots, AP_n, BP_1, BP_2, \dots, BP_n$ により分けられる第 1 象限の部分の個数を a_n とする. たとえば $n = 1$ のとき, 図のように第 1 象限が 3 つの部分に分けられるので $a_1 = 3$ である. 次の問に答えよ.

- (1) a_2, a_3 の値を求めよ.
- (2) a_{n+1} を a_n と n を用いて表し, その理由を述べよ.
- (3) a_n を n を用いて表せ.



- 3 a は 1 より大きい定数とする. 関数 $f(x) = (x + a)(x + 1)(x - a)$ について, 次の問に答えよ.

- (1) $f(x)$ は $x = \alpha$ と $x = \beta$ ($\alpha < \beta$) で極値をとるとする. 2 点 $(\alpha, f(\alpha))$ と $(\beta, f(\beta))$ を結ぶ直線の傾きが, 点 $(-1, 0)$ における曲線 $y = f(x)$ の接線の傾きと等しいとき, a の値を求めよ.
- (2) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする. a が (1) で求めた値をとるとき, 曲線 $y = f'(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ.

解答例

1 (1) $\omega = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおくと

$$(*) \quad \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \omega, \quad \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \omega$$

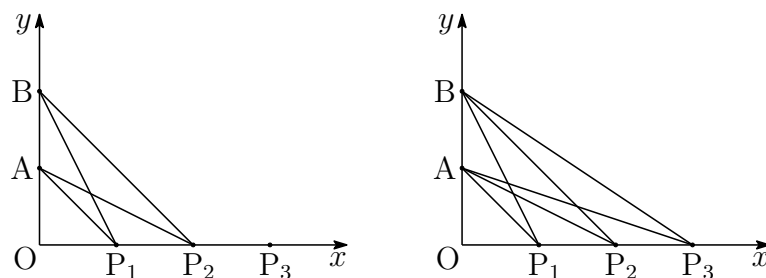
$$\text{よって} \quad \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \bar{\omega} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2) $(*)$ の第 1 式から

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 + \omega(z_2 - z_1) \\ &= 2i + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}i)\{(-2 - 2\sqrt{2}i) - 2i\} \\ &= 2i - (1 + \sqrt{3}i)\{1 + (1 + \sqrt{2})i\} \\ &= -1 + \sqrt{3} + \sqrt{6} + (1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})i \end{aligned}$$

■

2 (1) 下の図から $a_2 = 6, a_3 = 10$



(2) 線分による領域の数は, BP_{n+1} を引くことにより 1 増え, AP_{n+1} を引くことにより $n+1$ 増えるから, 次の漸化式が成立する.

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + n + 2$$

$$n > 1 \text{ のとき} \quad \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} (k+2)$$

$$a_n - a_1 = \frac{1}{2}n(n-1) + 2(n-1) \quad \text{ゆえに} \quad a_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \quad (*)$$

$$(*) \text{ は } n=1 \text{ のときも成立するから} \quad a_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

■

3 (1) $f(x) = (x+a)(x+1)(x-a) = x^3 + x^2 - a^2x - a^2$ より

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - a^2$$

$x = \alpha, \beta$ で $f(x)$ は極値をとるから, α, β は $f'(x) = 0$ の解であり, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{3}, \quad \alpha\beta = -\frac{a^2}{3}$$

したがって, 2点 $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$ を通る直線の傾きは

$$\begin{aligned} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} &= \frac{\beta^3 + \beta^2 - a^2\beta - a^2 - (\alpha^3 + \alpha^2 - a^2\alpha - a^2)}{\beta - \alpha} \\ &= \frac{\beta^3 - \alpha^3}{\beta - \alpha} + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha} - \frac{a^2(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} \\ &= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + \alpha + \beta - a^2 \\ &= (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta + \alpha + \beta - a^2 \\ &= \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3} - \frac{2}{3} - a^2 \\ &= -\frac{2}{9} - \frac{2}{3}a^2 \end{aligned}$$

これが $f'(-1) = -1 - a^2$ と等しいから ($a > 1$)

$$-\frac{2}{9} - \frac{2}{3}a^2 = -1 - a^2 \quad \text{よって} \quad a = \sqrt{\frac{11}{3}}$$

(2) $f'(x) = 3x^2 + 2x - \frac{11}{3} = 3(x - \alpha)(x - \beta)$ より

$$f'(x) = 0 \text{ の解は } x = \frac{-1 \pm 2\sqrt{3}}{3} \quad \alpha < \beta \text{ より } \beta - \alpha = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

よって, 求める面積 S は

$$S = -3 \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \right)^3 = \frac{32}{3\sqrt{3}}$$

■