令和７年度　広島大学　２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理・工・医・歯・薬・教育 (自然系・理数系)・
総合学科 (理科系)・生物生産

問題 1 2 3 4 5

1 次の問いに答えよ．ただし，$\log x$ は自然対数を表す．

(1) $x > 0$ で定義された次の関数の最大値を求めよ．

$$f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$$

(2) 次の不定積分をそれぞれ求めよ．

$$\int \log x \, dx, \quad \int (\log x)^2 \, dx$$

(3) (1) で求めた最大値を a として，座標平面上の二つの曲線 $C_1 : y = a\sqrt{x}$, $C_2 : y = \log x$ を考える．x 軸と二つの曲線 C_1, C_2 によって囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

2 $a>0$ とし，p を実数とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を考える．P_n，Q_n，R_n $(n=1,2,3,\cdots)$ が以下の二つの条件を満たすとする．

(i) 点 P_1 は直線 AB 上にあり，x 座標が p である．

(ii) 自然数 n に対し，

- 点 P_n から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点が Q_n である．ただし，点 P_n が x 軸上にあるときは，点 Q_n は P_n と同じ点であるとする．
- 点 Q_n から直線 AC に下ろした垂線と直線 AC との交点が R_n である．ただし，点 Q_n が直線 AC 上にあるときは，点 R_n は Q_n と同じ点であるとする．
- 点 R_n を通り x 軸と平行な直線と直線 AB との交点が P_{n+1} である．

点 P_n の x 座標を x_n とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 R_1 の座標を a，p を用いて表せ．

(2) 命題

「点 P_1 が線分 AB 上にあるならば，点 R_1 は線分 AC 上にある」が真であるような a の値の範囲を求めよ．ただし，線分は両端を含むものとする．

(3) x_n を $a,\ n,\ p$ を用いて表せ．

(4) $a=2,\ p=0$ であるとき，不等式

$$|x_{n+1}-x_n|<10^{-10}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．

3 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ を満たす θ に対し，座標平面上の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円上の 4 点

$$\mathrm{A}(1,\ 0),\ \mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{C}(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta),\ \mathrm{D}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$$

を考え，$\triangle\mathrm{OAD}$ の面積を $S(\theta)$，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を $T(\theta)$，$\triangle\mathrm{ABD}$ の面積を $U(\theta)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{\theta^3}$ を求めよ．

(3) $t = \cos\theta$ とおく．$\dfrac{U(\theta)}{\sin\theta}$ を t の整式で表せ．

(4) 関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = \frac{T(\theta)}{U(\theta)}$$

と定義する．$\displaystyle\lim_{\theta\to+0} f(\theta)$ を求めよ．また，θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ の範囲を動くとき，$f(\theta)$ のとり得る値の範囲を求めよ．

4 n を自然数とする．$(3n+1)$ 個の箱 A_1，A_2，$\cdots$，A_{3n+1} があり，1 から $3n+1$ までの各自然数 k に対して，k 番目の箱 A_k には，1 から k までの整数が一つずつ書かれた k 枚のカードが入っている．これを初期状態とする．次の問いに答えよ．

(1) 箱 A_{3n+1} に入っているすべてのカードに書かれた整数の平均値 L を n を用いて表せ．

(2) 箱 A_1，A_2，$\cdots$，A_{3n+1} に入っているすべてのカードに書かれた整数の平均値 M を n を用いて表せ．

(3) 初期状態から，箱 A_1，A_2，$\cdots$，A_{3n+1} に入っているすべてのカードを箱 B に移す．箱 B から 1 枚のカードを取り出すとき，カードに書かれた整数が (2) で求めた値 M に等しくなる確率を $P(n)$ とする．$P(n)$ を n を用いて表せ．

(4) M を (2) で求めた値とする．初期状態から，箱 A_M，A_{M+1}，$\cdots$，A_{3n+1} だけ集めて，ケース C に収納する．ケース C から一つの箱を選び，さらにその箱から 1 枚のカードを取り出す．カードに書かれた整数が M に等しいとき，そのカードが箱 A_{3n+1} から取り出されている条件付き確率を $Q(n)$ とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} nQ(n)$ を求めよ．

5 i を虚数単位とする．複素数 z_n $(n=1,2,3,\cdots)$ を

$$z_1=\sqrt{3}+2i,\quad z_{n+1}=2(z_n-i)^2+i\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

により定める．次の問いに答えよ．

(1) z_2-i と z_3-i を極形式で表せ．

(2) z_n-i を極形式で

$$z_n-i=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$

と表したとき，$\log_2 r_n$ を n を用いて表せ．

(3) z_n を n を用いて表せ．

(4) 複素数 z_n が表す複素数平面上の点を P_n とする．3 点 P_3，P_5，P_{2025} が同一直線上にあることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ より　$f'(x)=\dfrac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって　　**最大値** $\boldsymbol{f(e^2)=\dfrac{2}{e}}$

(2)

$$\begin{aligned}\int\log x\,dx&=\int(x)'\log x\,dx=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\&=\boldsymbol{x(\log x-1)+C}\quad(\boldsymbol{C}\text{ は積分定数}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int(\log x)^2\,dx&=\int(x)'(\log x)^2-\int x\cdot\frac{2\log x}{x}\,dx\\&=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx\\&=x(\log x)^2-2x(\log x-1)+C\\&=\boldsymbol{x\{(\log x)^2-2\log x+2\}+C}\quad(\boldsymbol{C}\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

別解　$t=\log x$ とおくと，$x=e^t$ より　$\dfrac{dx}{dt}=e^t$

$$\begin{aligned}\int\log x\,dx&=\int te^t\,dt=\{t-(t)'\}e^t+C\\&=\boldsymbol{(\log x-1)x+C},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int(\log x)^2\,dx&=\int t^2e^t\,dx=\{t^2-(t^2)'+(t^2)''\}e^t+C\\&=\boldsymbol{\{(\log x)^2-2\log x+2\}x+C}\end{aligned}$$

補足　別解は次の積分公式を利用している[1].

$$\int e^{kx}f(x)\,dx=\frac{e^{kx}}{k}\left\{f(x)-\frac{f'(x)}{k}+\frac{f''(x)}{k^2}-\frac{f'''(x)}{k^3}+\cdots\right\}+C$$

$$\int e^{x}f(x)\,dx=e^x\{f(x)-f'(x)+f''(x)-f'''(x)+\cdots\}+C$$

$$\int e^{-x}f(x)\,dx=-e^{-x}\{f(x)+f'(x)+f''(x)+f'''(x)+\cdots\}+C$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2023.pdf (p.10 を参照)

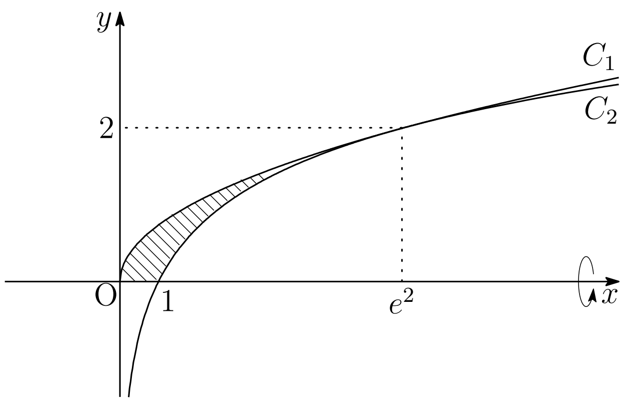
(3) (1) の結果より，$a=\dfrac{2}{e}=f(e^2)\geqq f(x)$ であるから

$$a\sqrt{x}-\log x=\sqrt{x}\left(a-\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)=\sqrt{x}\left\{f(e^2)-f(x)\right\}\geqq 0$$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^{e^2}(a\sqrt{x})^2\,dx-\int_1^{e^2}(\log x)^2\,dx\\&=\frac{2}{e^2}\Big[\,x^2\,\Big]_0^{e^2}-\Big[\,x\{(\log x)^2-2\log x+2\}\,\Big]_1^{e^2}\\&=2e^2-(2e^2-2)=2\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V=2\pi}$



別解 $C_1: x=\dfrac{e^2y^2}{4}$ $(y\geqq 0)$，$C_2: x=e^y$ であるから [2]

$$V=2\pi\int_0^2 y\left(e^y-\frac{e^2y^2}{4}\right)dy=2\pi\Big[\,e^y(y-1)-\frac{e^2y^4}{16}\,\Big]_0^2=\boldsymbol{2\pi}$$

バウムクーヘン型求積法

$a\leqq x\leqq b$ の範囲で $f(x)\geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

■

[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_i_2016.pdf $\boxed{2}$

2 (1) 点 P_1 の x 座標が p であるから，

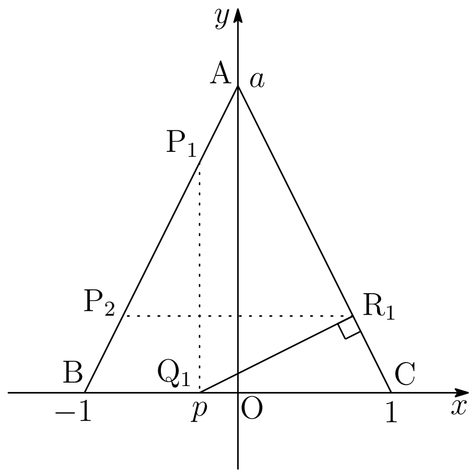
点 Q_1 の座標は　$(p,\ 0)$

直線 AC の方程式は $(a>0)$

$$y=-ax+a \quad \cdots ①$$

点 Q_1 を通り，直線 AC に垂直な直線の方程式は

$$y=\frac{1}{a}(x-p) \quad \cdots ②$$



点 R_1 は 2 直線 ①，② の交点であるから，これを解いて

$$\mathbf{R_1}\left(\boldsymbol{\frac{p+a^2}{1+a^2},\ \frac{a(1-p)}{1+a^2}}\right)$$

(2) 「点 P_1 が線分 AB 上にあるならば，点 R_1 は線分 AC 上にある」から，2 点 P_1，R_1 のそれぞれの x 座標に着目すると

$$-1\leqq p\leqq 0 \implies 0\leqq\frac{p+a^2}{1+a^2}\leqq 1 \iff -a^2\leqq p\leqq 1$$

この命題が真であるから　$-a^2\leqq -1$

$a>0$ に注意して解くと　$\boldsymbol{a\geqq 1}$

(3) 点 P_2 は，直線 AB : $y=ax+a$ 上の点であり，その y 座標は点 R_1 の y 座標と等しい．したがって，P_2 の x 座標 x_2 は

$$\frac{a(1-p)}{1+a^2}=ax_2+a \quad \text{ゆえに} \quad x_2=-\frac{p+a^2}{1+a^2}$$

よって，次の $\{x_n\}$ の漸化式を得る．

$$x_1=p,\quad x_{n+1}=-\frac{x_n+a^2}{1+a^2}$$

これから　$$x_{n+1}+\frac{a^2}{2+a^2}=-\frac{1}{1+a^2}\left(x_n+\frac{a^2}{2+a^2}\right)$$

$$x_n+\frac{a^2}{2+a^2}=\left(p+\frac{a^2}{2+a^2}\right)\left(-\frac{1}{1+a^2}\right)^{n-1}$$

$$\boldsymbol{x_n=\left(p+\frac{a^2}{2+a^2}\right)\left(-\frac{1}{1+a^2}\right)^{n-1}-\frac{a^2}{2+a^2}}$$

(4) $a=2$，$p=0$ を (3) の結果に代入すると

$$x_n = \frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1\right\}$$

したがって

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n} - 1\right\} - \frac{2}{3}\left\{\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} - 1\right\} \\ &= -\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 4\left(-\frac{1}{5}\right)^{n} \end{aligned}$$

$|x_{n+1}-x_n| = 4{\cdot}5^{-n}$ であるから，$|x_{n+1}-x_n| < 10^{-10}$ を満たすとき

$$\log_{10}(4{\cdot}5^{-n}) < -10 \quad \text{ゆえに} \quad n > \frac{10+\log_{10}4}{\log_{10}5} \qquad (*)$$

$$\frac{10+\log_{10}4}{\log_{10}5} = \frac{10+2\log_{10}2}{1-\log_{10}2} = \frac{10+2\times 0.3010}{1-0.3010} = \frac{10.6020}{0.6990} = 15.1\cdots$$

よって，$(*)$ を満たす最小の自然数 n は　　$\boldsymbol{n=16}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ A$(1,\ 0)$, B$(\cos\theta,\ \sin\theta)$, C$(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$, D$(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ より $(0<3\theta<\pi)$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\sin 3\theta \quad よって \quad \lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin 3\theta}{2\theta}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\cos\theta-1,\ \sin\theta)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\cos 2\theta-1,\ \sin 2\theta)$ より $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
T(\theta)&=\frac{1}{2}|\sin 2\theta(\cos\theta-1)-\sin\theta(\cos 2\theta-1)|\\
&=\frac{1}{2}|(\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta)-\sin 2\theta+\sin\theta|\\
&=\frac{1}{2}|2\sin\theta-\sin 2\theta|=\frac{1}{2}|2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta|\\
&=\sin\theta(1-\cos\theta) \qquad (*)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{\theta^3}&=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}\\
&=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\frac{1}{1+\cos\theta}=1^3\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\cos\theta-1,\ \sin\theta)$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(\cos 3\theta-1,\ \sin 3\theta)$ より $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
U(\theta)&=\frac{1}{2}|\sin 3\theta(\cos\theta-1)-\sin\theta(\cos 3\theta-1)|\\
&=\frac{1}{2}|(\sin 3\theta\cos\theta-\cos 3\theta\sin\theta)+\sin\theta-\sin 3\theta|\\
&=\frac{1}{2}|\sin 2\theta+(\sin\theta-\sin 3\theta)|\\
&=\frac{1}{2}|2\sin\theta\cos\theta-2\sin\theta\cos 2\theta|\\
&=|\sin\theta(\cos\theta-\cos 2\theta)|=|\sin\theta(\cos\theta-2\cos^2\theta+1)|\\
&=|\sin\theta(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)|\\
&=\sin\theta(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta) \qquad (**)
\end{aligned}$$

$t=\cos\theta$ とおくと

$$\frac{U(\theta)}{\sin\theta}=(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)=\boldsymbol{(1-t)(1+2t)}$$

(4) (*), (**) より $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}\right)$

$$f(\theta) = \frac{T(\theta)}{U(\theta)} = \frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)} = \frac{1}{1+2\cos\theta}$$

したがって $\displaystyle\lim_{\theta\to+0} f(\theta) = \boldsymbol{\frac{1}{3}}, \quad \boldsymbol{\frac{1}{2} < f(\theta) < \frac{1}{3}}$ ■

$\boxed{4}$ (1)

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{3n+1}\{1+2+\cdots+(3n+1)\} \\ &= \frac{1}{3n+1}\cdot\frac{1}{2}(3n+1)\{1+(3n+1)\} = \boldsymbol{\frac{3n+2}{2}} \end{aligned}$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{3n+1} k = \frac{1}{2}(3n+1)(3n+2),$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3n+1}\sum_{j=1}^{k} j &= \sum_{k=1}^{3n+1}\frac{1}{2}k(k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{3n+1}\frac{1}{6}k(k+1)\{(k+2)-(k-1)\} \\ &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{3n+1}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\} \\ &= \frac{1}{6}(3n+1)(3n+2)(3n+3) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(3n+1)(3n+2) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} M &= \sum_{k=1}^{3n+1}\sum_{j=1}^{k} j \Bigg/ \sum_{k=1}^{3n+1} k \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(3n+1)(3n+2) \Bigg/ \frac{1}{2}(3n+1)(3n+2) \\ &= \boldsymbol{n+1} \end{aligned}$$

(3) $n+1$ と書かれたカードの枚数は，A_{n+1}，A_{n+2}，$\cdots$，A_{3n+1} にあったカードの枚数で，$(3n+1)-(n+1)+1=2n+1$ (枚)．

よって，求める確率は

$$P(n)=2n+1\Big/\frac{1}{2}(3n+1)(3n+2)=\boldsymbol{\frac{2(2n+1)}{(3n+1)(3n+2)}}$$

(4) 取り出されたカードが $M(=n+1)$ である事象を X，取り出されたカードが箱 A_{3n+1} からである事象を Y とすると

$$P(X)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k},$$
$$P(X\cap Y)=\frac{1}{2n+1}\times\frac{1}{3n+1}=\frac{1}{(2n+1)(3n+1)}$$

上の 2 式から

$$\begin{aligned}Q(n)&=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}\\&=\frac{1}{(2n+1)(3n+1)}\Bigg/\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k}\\&=1\Bigg/(3n+1)\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k}\end{aligned}$$

したがって　$$\frac{1}{nQ(n)}=\left(3+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{nQ(n)}&=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\\&=3\int_0^2\frac{1}{1+x}\,dx=3\Big[\log(1+x)\Big]_0^2=3\log 3\end{aligned}$$

よって　$$\lim_{n\to\infty}nQ(n)=\boldsymbol{\frac{1}{3\log 3}}$$ ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ $z_1=\sqrt{3}+2i$，$z_{n+1}=2(z_n-i)^2+i$ より　$2(z_{n+1}-i)=\{2(z_n-i)\}^2$

$$\begin{aligned}2(z_n-i)&=\{2(z_1-i)\}^{2^{n-1}}=\{2(\sqrt{3}+i)\}^{2^{n-1}}\\&=\left\{4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right\}^{2^{n-1}}\\&=4^{2^{n-1}}\left(\cos\frac{2^{n-1}}{6}\pi+i\sin\frac{2^{n-1}}{6}\pi\right)\\&=(2^2)^{2^{n-1}}\left(\cos\frac{2^{n-2}}{3}\pi+i\sin\frac{2^{n-2}}{3}\pi\right)\\&=2^{2^n}\left(\cos\frac{2^{n-2}}{3}\pi+i\sin\frac{2^{n-2}}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

したがって　$$z_n-i=2^{2^n-1}\left(\cos\frac{2^{n-2}}{3}\pi+i\sin\frac{2^{n-2}}{3}\pi\right)\quad\cdots(*)$$

(1) $(*)$ に $n=2,\ 3$ をそれぞれ代入すると

$$z_2-i=\mathbf{8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)},$$
$$z_3-i=\mathbf{128\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$$

(2) $(*)$ より，$r_n=2^{2^n-1}$ であるから　$\mathbf{\log_2 r_n=2^n-1}$

(3) $(*)$ より　$\boldsymbol{z_n-i=2^{2^n-1}\left(\cos\frac{2^{n-2}}{3}\pi+i\sin\frac{2^{n-2}}{3}\pi\right)}$

(4) $(*)$ より　$\arg(z_n-i)=\dfrac{2^{n-2}}{3}\pi$

$2^{n-2}\equiv(-1)^{n-2}\equiv(-1)^n \pmod 3$ であるから

$$(-1)^3\equiv(-1)^5\equiv(-1)^{2025}\equiv 2\pmod 3$$

よって，$\arg(z_3-i)$，$\arg(z_5-i)$，$\arg(z_{2025}-i)$ は　$\dfrac{2\pi}{3}$ または $\dfrac{5\pi}{3}$

$$\frac{z_{2025}-z_3}{z_5-z_3}=\frac{(z_{2025}-i)-(z_3-i)}{(z_5-i)-(z_3-i)}$$

は実数であるから，3 点 P_3，P_5，P_{2025} は同一直線上にある．■